TRASFORMAZIONI DI VARIABILI

TRASFORMAZIONI DI VARIABILI

- Cosa significa *trasformazione* di una variabile e a cosa serve ?
- Una trasformazione di variabile è una operazione di calcolo che si applica a ciascun valore assunto dalla variabile e lo trasforma in un nuovo valore:
  il risultato della trasformazione è una nuova variabile
- Un primo esempio di trasformazione si applica per confrontare dati misurati su scala diversa:
  - è più veloce la Ferrari Testarossa (340 km/h) o la Chevrolet Corvette (210Mph) ? [1 Miglio = 1,6093 Km]
  - oggi ha fatto più caldo a Miami (104 °F) o a Verona (30°C) ? [°F = 9/5 °C + 32]
- A volte ci interessa di più mettere in evidenza *differenze* tra i dati, che non i valori assoluti: un modo generale ed efficace è vedere dove si colloca una data osservazione all'interno della sua distribuzione di provenienza:
  - com'è andato l'esame di statistica di Debora, rispetto agli altri che hanno partecipato al suo stesso appello ?
  - l'estate del 2003 è stata molto più calda rispetto a quelle degli ultimi 50 anni ? questa differenza può essere considerata normale o straordinaria ?
- Particolari trasformazioni trovano applicazione per eliminare l'unità di misura delle variabili: ad es. nella costruzione di indici sintetici per descrivere un fenomeno complesso, composto da diversi aspetti (variabili) osservabili singolarmente

TRASFORMAZIONI DI VARIABILI

- **Trasformazione w = x + a**
  ovvero sommare/sottrarre una costante
- Cosa succede alla distribuzione di una variabile X quando aggiungiamo (o sottraiamo) una costante a tutti i valori ?

$$w_i = x_i + a \qquad \forall\, i = 1,\dots,n$$

- In particolare, come cambiano la media e la varianza ?

$$M(w) = M(x) + a$$

$$infatti:$$

$$M(w) = \frac{\sum w_i}{n} = \frac{\sum (x_i + a)}{n} =$$

$$= \frac{\sum x_i + \sum a}{n} = \frac{\sum x_i + n \cdot a}{n} =$$

$$= \frac{\sum x_i}{n} + \frac{n}{n} a = M(x) + a$$

i	x(i)	w(i)
1	182	178
2	170	166
3	174	170
4	168	164
5	148	144
6	155	151
7	169	165
8	149	145
9	157	153
10	169	165
11	198	194
12	201	197
13	158	154
14	147	143
15	198	194
Totale	2543	2483
Media	169,53	165,53

TRASFORMAZIONI DI VARIABILI

- La varianza, invece, non cambia:

$$V(w) = V(x)$$

$$infatti:$$

$$V(w) = \frac{\sum [w_i - M(w)]^2}{n} =$$

$$= \frac{\sum [(x_i + a) - (M(x) + a)]^2}{n} =$$

$$= \frac{\sum [x_i + a - M(x) - a)]^2}{n} =$$

$$= \frac{\sum [(x_i - M(x)]^2}{n} = V(x)$$

i	x(i)	w(i)	[x(i)-Mx]^2	[w(i)-Mw]^2
1	182	178	155,42	155,42
2	170	166	0,22	0,22
3	174	170	19,95	19,95
4	168	164	2,35	2,35
5	148	144	463,68	463,68
6	155	151	211,22	211,22
7	169	165	0,28	0,28
8	149	145	421,62	421,62
9	157	153	157,08	157,08
10	169	165	0,28	0,28
11	198	194	810,35	810,35
12	201	197	990,15	990,15
13	158	154	133,02	133,02
14	147	143	507,75	507,75
15	198	194	810,35	810,35
Totale	2543	2483	4683,7333	4683,7333
Media	169,53	165,53	312,25	312,25

- Questa trasformazione equivale a spostare l'*origine* del sistema di riferimento dei dati (*traslazione*)
- La costante a è detta parametro di *posizione*

TRASFORMAZIONI DI VARIABILI

- **Trasformazione w = x b**
  ovvero moltiplicare/dividere per una costante
- Cosa succede alla distribuzione di una variabile X quando moltiplichiamo (o dividiamo) tutti i valori per una costante ?

$$w_i = b\, x_i \qquad \forall\, i = 1,\dots,n$$

- Questa trasformazione equivale a cambiare l'unità di misura del sistema di riferimento
- La costante b è detto parametro di *scala*
- Vediamo come diventano media e varianza:

$$M(w) = b\, M(x)$$

infatti:

$$M(w) = \frac{\sum w_i}{n} = \frac{\sum b\, x_i}{n} =$$

$$= \frac{b \sum x_i}{n} = b\, \frac{\sum x_i}{n} = b\, M(x)$$

i	x(i)	w(i)
1	182	364
2	170	340
3	174	348
4	168	336
5	148	296
6	155	310
7	169	338
8	149	298
9	157	314
10	169	338
11	198	396
12	201	402
13	158	316
14	147	294
15	198	396
Totale	2543	5086
Media	169,53	339,07

TRASFORMAZIONI DI VARIABILI

- Calcoliamo anche la varianza di w:

$$V(w) = b^2\, V(x)$$

infatti:

$$V(w) = \frac{\sum [w_i - M(w)]^2}{n} =$$

$$= \frac{\sum [b\, x_i - b\, M(x)]^2}{n} =$$

$$= \frac{\sum [b\,(x_i - M(x))]^2}{n} =$$

$$= \frac{\sum b^2 [x_i - M(x)]^2}{n} =$$

$$= b^2\, \frac{\sum [x_i - M(x)]^2}{n} =$$

$$= b^2\, V(x)$$

i	x(i)	w(i)	[x(i)-Mx]^2	[w(i)-Mw]^2
1	182	364	155,42	621,67
2	170	340	0,22	0,87
3	174	348	19,95	79,80
4	168	336	2,35	9,40
5	148	296	463,68	1854,74
6	155	310	211,22	844,87
7	169	338	0,28	1,14
8	149	298	421,62	1686,47
9	157	314	157,08	628,34
10	169	338	0,28	1,14
11	198	396	810,35	3241,40
12	201	402	990,15	3960,60
13	158	316	133,02	532,07
14	147	294	507,75	2031,00
15	198	396	810,35	3241,40
Totale	2543	5086	4683,7333	18734,933
Media	169,53	339,07	312,25	1249,00

TRASFORMAZIONI DI VARIABILI

- **Trasformazione w = a + b x**
- Cosa succede alla distribuzione di una variabile X combinando entrambe le trasformazioni appena viste ?

$$w_i = a + b\, x_i \qquad \forall\, i = 1,\dots,n$$

- Vediamo come diventa la media della variabile trasformata w:

$$M(w) = a + b\, M(x)$$

$$infatti:$$

$$M(w) = \frac{\sum w_i}{n} = \frac{\sum (a + b x_i)}{n} =$$

$$= \frac{\sum a + \sum b x_i}{n} = \frac{n \cdot a + b \sum x_i}{n} =$$

$$= \frac{n}{n} a + b \frac{\sum x_i}{n} = a + b\, M(x)$$

i	x(i)	w(i)
1	182	360
2	170	336
3	174	344
4	168	332
5	148	292
6	155	306
7	169	334
8	149	294
9	157	310
10	169	334
11	198	392
12	201	398
13	158	312
14	147	290
15	198	392
Totale	2543	5026
Media	169,53	335,07

TRASFORMAZIONI DI VARIABILI

- Vediamo come cambia la varianza :

$$V(w) = b^2\, V(x)$$

$$infatti:$$

$$V(w) = \frac{\sum [w_i - M(w)]^2}{n} =$$

$$= \frac{\sum [(a + b\, x_i) - (a + b\, M(x))]^2}{n} =$$

$$= \frac{\sum [a + b\, x_i - a - b\, M(x)]^2}{n} =$$

$$= \frac{\sum [b\,(x_i - M(x))]^2}{n} =$$

$$= \frac{\sum b^2 [x_i - M(x)]^2}{n} =$$

$$= b^2 \frac{\sum [x_i - M(x)]^2}{n} = b^2\, V(x)$$

i	x(i)	w(i)	[x(i)-Mx]^2	[w(i)-Mw]^2
1	182	360	155,42	621,67
2	170	336	0,22	0,87
3	174	344	19,95	79,80
4	168	332	2,35	9,40
5	148	292	463,68	1854,74
6	155	306	211,22	844,87
7	169	334	0,28	1,14
8	149	294	421,62	1686,47
9	157	310	157,08	628,34
10	169	334	0,28	1,14
11	198	392	810,35	3241,40
12	201	398	990,15	3960,60
13	158	312	133,02	532,07
14	147	290	507,75	2031,00
15	198	392	810,35	3241,40
Totale	2543	5026	4683,7333	18734,933
Media	169,53	335,07	312,25	1249,00

TRASFORMAZIONI DI VARIABILI

- **Standardizzazione (Trasformazione in Punti z)**
  - La trasformazione più importante ed utilizzata è la seguente:

$$\boxed{z = \frac{x - \bar{x}}{\sigma}}$$

$$\textit{ovvero} \quad z_i = \frac{x_i - \bar{x}}{\sigma} \quad \forall i$$

  - Questa trasformazione prende il nome di **standardizzazione,** e i valori trasformati sono detti **punti z**
  - Equivale ad una doppia operazione:
    - una traslazione dell'origine del sistema di riferimento dei dati nel suo *baricentro* (la media aritmetica)
    - un successivo cambiamento di scala di un fattore 1/σ

- Esempio:
  calcoliamo i punti z relativi ai voti dell'ultimo appello d'esame di statistica
- Notiamo che la media dei punteggi z standardizzati risulta esattamente uguale a 0.
- E lo scarto quadratico medio dei valori standardizzati risulta esattamente uguale a 1

i	x(i)	z(i)
1	19	-1,50
2	22	-0,75
3	26	0,25
4	28	0,75
5	30	1,25
Totale	125	0
Media	25,00	0,00
SQM	4,00	1,00

TRASFORMAZIONI DI VARIABILI

- Ricaviamo media e varianza dei valori trasformati, detti punti z:

$$M(z) = \frac{\sum z_i}{n} = \frac{\sum \frac{x_i - \bar{x}}{\sigma}}{n} = \frac{1}{n}\sum \frac{x_i - \bar{x}}{\sigma} = \frac{1}{n}\frac{1}{\sigma}\underbrace{\sum (x_i - \bar{x})}_{\substack{=0 \\ \textit{somma scarti dalla media}}} = 0$$

$$\sum (x_i - \bar{x}) = \sum x_i - \sum \bar{x} = n\,\bar{x} - n\,\bar{x} = 0$$

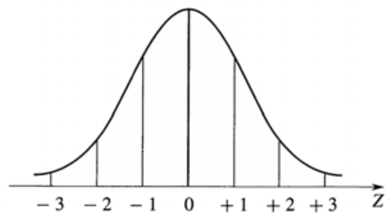
- Vediamo anche la varianza:

$$V(z) = \frac{\sum (z_i - \bar{z})^2}{n} = \frac{\sum (z_i - 0)^2}{n} = \frac{\sum (\frac{x_i - \bar{x}}{\sigma})^2}{n} = \frac{1}{n}\sum (\frac{x_i - \bar{x}}{\sigma})^2 =$$

$$= \frac{1}{n}\sum \frac{(x_i - \bar{x})^2}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2}\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{\sigma^2}{\sigma^2} = 1$$

TRASFORMAZIONI DI VARIABILI

- **Proprietà della standardizzazione**
- Il valore medio di una variabile standardizzata è sempre uguale a 0, qualunque siano i valori dei dati originali.
- La varianza (e lo scarto quadratico medio) di una variabile standardizzata è sempre uguale a 1.
- Il valore standardizzato, o punteggio z, permette di capire immediatamente il posizionamento di un dato all'interno della distribuzione da cui proviene, infatti:
  - un valore standardizzato positivo indica che l'osservazione è superiore alla media
  - un valore standardizzato negativo indica che l'osservazione è inferiore alla media
  - il valore standardizzato è nullo quando l'osservazione coincide con il valore medio



- Il valore standardizzato misura di quanti scarti quadratici medi un'osservazione è distante (in positivo o in negativo) dal valore medio
- *Normalmente*, la *maggior parte* (~95%) dei valori osservati standardizzati si trova compresa tra z=-2 e z=+2 : valori superiori (o inferiori) di 2 scarti quadratici medi rispetto al valore medio vengono considerati valori estremi.

TRASFORMAZIONI DI VARIABILI

- Esercizio: chi ha preso il voto "migliore" ?

  Due amiche discutono su chi di loro ha ottenuto il risultato migliore in un esame: Debora ha preso 28 in Filosofia della Scienza mentre Samanta ha preso 25 in Statistica Sociale.
  A prima vista risultato migliore sembrerebbe quello di Debora, ma consideriamo che il voto medio in Filosofia è 29,4 (sqm=0,7) mentre in Statistica è 24 (sqm=4)
  Il voto ottenuto da Samanta è davvero un risultato peggiore ?

- Per confrontare i due risultati, è necessario valutarli in termini relativi facendo riferimento alle distribuzioni dei voti nei due diversi esami: occorre cioè standardizzare i due voti rispetto alle rispettive distribuzioni di provenienza

$$z = \frac{x - \bar{x}}{\sigma}$$

$$z_{Debora} = \frac{28 - 29{,}4}{0{,}7} = -2{,}00$$

$$z_{Samanta} = \frac{26 - 24}{4} = 0{,}50$$

	Filosofia	Statistica
Media	29,4	24,00
SQM	0,7	4,00
	Debora	Samanta
Voto (x)	28	26,00
z	-2,00	0,50

TRASFORMAZIONI DI VARIABILI

- **Trasformazione w = x + y**
  ovvero la somma di due variabili

$$w_i = x_i + y_i \qquad \forall\, i = 1,\dots,n$$

- Vediamo come si comporta la distribuzione della somma di due variabili
- Come diventa la media della variabile trasformata w:

$$M(w) = M(x) + M(y)$$

$infatti:$

$$M(w) = \frac{\sum w_i}{n} = \frac{\sum (x_i + y_i)}{n} = $$
$$= \frac{\sum x_i + \sum y_i}{n} = \frac{\sum x_i}{n} + \frac{\sum y_i}{n} =$$
$$= M(x) + M(y)$$

i	x	y	w = x + y
1	22	2	24
2	23	3	26
3	27	4	31
4	20	4	24
5	23	5	28
6	22	6	28
Media	22,83	4,00	26,83

TRASFORMAZIONI DI VARIABILI

- Vediamo ora come diventa la varianza della variabile trasformata w:

$$\boxed{V(w) = V(x) + V(y)}\boxed{+\ 2Cov(x,y)}$$

$infatti:$

$$V(w) = \frac{\sum (w_i - \bar{w})^2}{n} = \frac{\sum (x_i + y_i - \bar{x} - \bar{y})^2}{n} =$$
$$= \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2 + \sum (y_i - \bar{y})^2 + 2\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n} =$$
$$= \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n} + \frac{\sum (y_i - \bar{y})^2}{n} + 2\underbrace{\frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n}}_{Cov(x,y)} =$$
$$= V(x) + V(y) + 2Cov(x,y)$$

- Solo quando le due variabili x e y sono *indipendenti* (o almeno *incorrelate*), la terza quantità (detta covarianza) si annulla.
- La covarianza e il concetto di indipendenza e saranno riprese e approfondite nella seconda parte del corso.

TRASFORMAZIONI DI VARIABILI

- Esercizio: verifichiamo empiricamente le relazioni viste. Se x e y sono incorrelate :

i	x	x-M(x)	[x-M(x)]²	y	y-M(y)	[y-M(y)]²	w = x + y	w-M(w)	[w-M(w)]²
1	22	-0,83	0,69	2	-2,00	4,00	24	-2,83	8,03
2	23	0,17	0,03	3	-1,00	1,00	26	-0,83	0,69
3	27	4,17	17,36	4	0,00	0,00	31	4,17	17,36
4	20	-2,83	8,03	4	0,00	0,00	24	-2,83	8,03
5	23	0,17	0,03	5	1,00	1,00	28	1,17	1,36
6	22	-0,83	0,69	6	2,00	4,00	28	1,17	1,36
media	22,83		4,47	4,00		1,67	26,83		6,14

- Se invece le due variabili non sono incorrelate, la varianza della somma non risulta più uguale alla somma delle varianze :

i	x	x-M(x)	[x-M(x)]²	y	y-M(y)	[y-M(y)]²	w = x + y	w-M(w)	[w-M(w)]²
1	30	5,83	34,03	2	-2,00	4,00	32	3,83	14,69
2	23	-1,17	1,36	3	-1,00	1,00	26	-2,17	4,69
3	27	2,83	8,03	4	0,00	0,00	31	2,83	8,03
4	20	-4,17	17,36	4	0,00	0,00	24	-4,17	17,36
5	23	-1,17	1,36	5	1,00	1,00	28	-0,17	0,03
6	22	-2,17	4,69	6	2,00	4,00	28	-0,17	0,03
media	24,17		11,14	4,00		1,67	28,17		7,47

TRASFORMAZIONI DI VARIABILI

- **Trasformazione W = X1 + X2 + ... + Xk**
  ovvero la somma di k variabili
- Come si comporta la distribuzione della somma di k variabili ?
- Indichiamo le k variabili Xj in maiuscolo per ricordarci che si tratta di variabili, e non di singole osservazioni:

$$M(W) = M(X_1 + X_2 + ... + X_k) = M(X_1) + M(X_2) + ... + M(X_k)$$

$$M(\sum_j^k X_j) = \sum_j^k M(X_j)$$

- Inoltre, SOLO quando le k variabili sono indipendenti, vale anche:

$$V(W) = V(X_1 + X_2 + ... + X_k) = V(X_1) + V(X_2) + ... + V(X_k)$$

$$V(\sum_j^k X_j) = \sum_j^k V(X_j)$$

TRASFORMAZIONI DI VARIABILI

- **Indici sintetici composti**
- Un'altra applicazione della standardizzazione è relativa alla costruzione indici sintetici *composti*, cioè che tengono conto di più variabili contemporaneamente
- I fenomeni reali, e quelli sociali in particolare, sono complessi e multidimensionali, coinvolgono e sono costituiti di un gran numero di aspetti (variabili), ciascuno dei quali dovrà essere misurato per descrivere il fenomeno nel suo complesso.
- Spesso si ha l'esigenza di riassumere lo stato di un fenomeno complesso in un unico numero (misura), che ne sintetizzi i vari aspetti con riferimento ad un obiettivo preciso: es. indice di inquinamento dell'aria per decidere se bloccare il traffico
- Qualsiasi metodo di sintesi di indicatori semplici in un indice sintetico presuppone che essi possano essere riportati ad una unità di misura comune o comparabile:
  - la forma più semplice di *composizione* è certamente la somma o la media dei valori assunti dagli indicatori elementari
  - perché abbia senso sommare variabili diverse, è necessario che siano state rese comparabili attraverso opportune trasformazioni e standardizzazioni: ad es. non avrebbe senso sommare direttamente pm10 con benzene e anidride solforosa...

TRASFORMAZIONI DI VARIABILI

- Esercizio

  L'ESU deve decidere a chi assegnare 10 borse di studio per merito, agli studenti che hanno avuto il rendimento migliore. Ma come valutare il rendimento complessivo di uno studente ? Occorre definire un criterio.

  Si decide di tenere in considerazione i quattro (migliori) esami superati nell'anno accademico precedente quello della domanda. Considerati dunque gli studenti che hanno sostenuto (almeno) 4 esami, ci si chiede se sia giusto assegnare le borse sulla base della media aritmetica semplice dei voti.

  Qualcuno osserva però che questo criterio favorirebbe gli studenti che hanno dato gli esami più facili...

Esame	Debora	Samanta
Statistica	26	-
Informatica	26	-
Sociologia	-	30
Psicologia	27	27
Economia	27	26
Filosofia	-	30

Esame	voto medio	sqm
Statistica	24	3
Informatica	25	2
Sociologia	29	1
Psicologia	26	2
Economia	27	2
Filosofia	29	1

TRASFORMAZIONI DI VARIABILI

- Come possiamo eliminare questo effetto, e quindi evitare di premiare chi ha rimandato gli esami più impegnativi a favore di quelli dove si ottengono più facilmente voti più alti ?
  - standardizziamo i voti dei singoli esami: in questo modo ogni voto viene relativizzato rispetto alla propria distribuzione di provenienza
  - quindi costruiamo l'indice sintetico come media dei 4 voti standardizzati:

$$I_{ESU} = \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{4}\frac{x_j - \bar{x}_j}{\sigma_j}$$

			Voto		Voto standardizzato	
Esame	voto medio	sqm	Debora	Samanta	Debora	Samanta
Statistica	24	4	26	-	0,50	
Informatica	25	2	26	-	0,50	
Sociologia	29	2	-	30		0,50
Psicologia	26	2	26	28	0,00	1,00
Economia	27	3	27	25	0,00	-0,67
Filosofia	29	1	-	28		-1,00
Media			26,25	27,75	0,25	-0,04

TRASFORMAZIONI DI VARIABILI

- **Il sistema di ponderazione negli Indici sintetici composti**
- Nella costruzione di un indice sintetico, si può decidere di dare agli indicatori elementari pesi diversi, per enfatizzare l'importanza che ciascuno di essi assume, in relazione al suo contributo alla definizione del fenomeno complesso
- L'indice avrà allora la struttura di una media aritmetica ponderata:

$$I = \frac{\sum_{j=1}^{k} I_j w_j}{\sum_{j=1}^{k} w_j}$$

I(j) : indicatore elementare

w(j) : peso attribuito all'indicatore j-esimo

k : numero di indicatori elementari

- Quando si utilizzano dei pesi, la media (ponderata) si calcola dividendo per la somma dei pesi
- Il sistema di ponderazione può derivare da considerazioni e valutazioni soggettive, conoscenze specifiche, giudizi di esperti, scelte politiche... o possono invece essere determinati mediante procedure statistiche (modelli di regressione, matrici di correlazione, ...)
- L'obiettivo del sistema di pesi è tenere conto nell'indice sintetico del diverso contributo che ciascuna variabile-indicatore elementare (unidimensionale) fornisce alla determinazione del fenomeno complesso (multidimensionale).

TRASFORMAZIONI DI VARIABILI

- Torniamo all'esempio dell'ESU e decidiamo di dare peso doppio alla Psicologia e peso invece dimezzato all'Economia :

$$I_{ESU} = \frac{\sum_{j=1}^{4} I_j w_j}{\sum_{j=1}^{4} w_j}$$

Esame	voto medio	sqm	peso w(j)
Statistica	24	3	1
Informatica	25	2	1
Sociologia	29	1	1
Psicologia	26	2	2
Economia	27	2	0,5
Filosofia	29	1	1

- Come indicatori elementari continuiamo ad utilizzare i voti standardizzati:

$$I_j = \frac{x_j - \mu_j}{\sigma_j}$$

- L'indice composto ponderato dell'ESU diventa quindi:

$$I_{ESU} = \sum_{j=1}^{4} \frac{x_j - \mu_j}{\sigma_j} w_j \Big/ \sum_{j=1}^{4} w_j$$

TRASFORMAZIONI DI VARIABILI

- Esercizio. Calcoliamo allora questo indice:

$$I_{ESU} = \sum_{j=1}^{4} \frac{x_j - \mu_j}{\sigma_j} w_j \Big/ \sum_{j=1}^{4} w_j$$

- Oltre ad aggiungere due nuove colonne al nostro prospetto di calcolo, dobbiamo ricordarci di dividere per la somma dei pesi, ovvero nel nostro caso:

$$\sum_{j=1}^{4} w_j = 1 + 1 + 2 + 0{,}5 = 4{,}5$$

			Peso	Voto		Voto standard		Voto std pesato	
Esame	media	sqm	w(j)	Debora	Samanta	Debora	Samanta	Debora	Samanta
Statistica	24	4	1,0	26	-	0,50		0,50	
Informatica	25	2	1,0	26	-	0,50		0,50	
Sociologia	29	2	1,0	-	30		0,50		0,50
Psicologia	26	2	2,0	26	28	0,00	1,00	0,00	2,00
Economia	27	3	0,5	27	25	0,00	-0,67	0,00	-0,33
Filosofia	29	1	1,0	-	28		-1,00		-1,00
Media				26,25	27,75	0,25	-0,04	0,22	0,26

INDICI SINTETICI

- **Esempio: L'inquinamento dell'aria**
- Inquinanti dell'aria più importanti:
  - PM10
  - Biossido di zolfo (SO2)
  - Monossido di carbonio (CO)
  - Ossidi di Azoto (NOx)
  - Idrocarburi (Benzene)
  - Ozono (O3)
  - Piombo (Pb)

agente	unità	soglia 1	soglia 2	limite	gg.
PM10	µg/m3	20	30	50	35
S02	µg/m3	26	75	125	3
CO	mg/m3	5	7	10	-
NOx	µg/m3	19,5	24	30	18
Benzene	µg/m3	2	3,5	5	-
O3	µg/m3*	180	240	240	-
Pb	µg/m3	0,25	0,35	0,5	18

- Con il termine particolato si intendono tutte le particelle solide o liquide sospese nell'aria (esclusa l'acqua pura H2O), con dimensioni microscopiche:
  - PM10 è il particolato atmosferico che ha un diametro uguale o inferiore a 10 µm
  - PM2.5 è la frazione più fine del PM10, costituita da particelle con diametro ≤ 2,5 µm
- Il diametro delle particelle è considerato un parametro molto importante perché caratterizza il comportamento fisico e biologico del particolato atmosferico
- Il particolato più fine può rimanere sospeso nell'atmosfera per giorni o settimane mentre le particelle più grosse e pesanti (da 2,5 a 10 µm) precipitano in poche ore o giorni. Queste ultime contribuiscono molto al peso totale misurato delle particelle in sospensione (PM10), ma sono meno dannose per la salute e l'ambiente.
  Il particolato PM2.5 è molto più pericoloso per la salute del PM10.

INDICI SINTETICI

- Il PM2.5 è una miscela complessa di migliaia di composti chimici, particelle carboniose, fibre, silice, metalli e leghe, di estrema attenzione per la salute a causa della elevata tossicità, del ruolo nelle neoplasie e nelle malattie cardio-circolatorie.
- Recenti ricerche hanno poi evidenziato la grande pericolosità delle nano-particelle inorganiche, che sono state osservate all'interno dei nuclei delle cellule tumorali.
- Il particolato è prodotto principalmente nei processi di combustione. I motori a scoppio sono una delle fonti principali di particolato, soprattutto i motori diesel.
- La dimensione delle particelle prodotte è legata alla temperatura di combustione. **Le particelle più piccole e pericolose sono prodotte dalle combustioni a più elevate temperature (inceneritori e "termovalorizzatori", cementifici, altoforni)**
- La misura del PM10 è un metodo di valutazione dell'inquinamento da particolato del tutto inadeguato: non distingue infatti le particelle grossolane da quelle più piccole e pericolose (PM2.5 e inferiori).
- Ad una particella PM10 corrispondono (in volume/peso) almeno 64 particelle PM2.5:
  - ad un elevato valore di PM10 (in peso) può corrispondere una situazione con poco particolato fine e molte particelle più grossolane e pesanti
  - ad un valore basso di PM10 può corrispondere una situazione con poco particolato grossolano ma con una elevatissima presenza di particelle più fini
- È quindi importante distinguere i tipi di particelle e basare la valutazione della qualità dell'aria sulla loro pericolosità biologica, e non sul peso totale del particolato.

TRASFORMAZIONI DI VARIABILI

- Costruiamo un indice sintetico per valutare la presenza nell'aria dei due tipi di particolato, che rifletta la pericolosità per la salute:

$$I_{PTS} = \frac{\sum_{j=1}^{2} I_j w_j}{\sum_{j=1}^{2} w_j}$$

- Come indicatori elementari utilizziamo i valori delle frazioni PM10 e PM2.5 standardizzati rispetto alle distribuzioni normative di riferimento:

$$I_j = \frac{x_j - \mu_j}{\sigma_j}$$

- Si decide di dare inoltre pesi diversi alle due componenti, per tenere conto della diversa pericolosità biologica per l'uomo. L'indice sintetico avrà dunque questa struttura:

$$I_{PTS} = \sum_{j=1}^{2} \frac{x_j - \mu_j}{\sigma_j} w_j \Bigg/ \sum_{j=1}^{2} w_j$$

Prof. Claudio Capiluppi - Facoltà di Scienze della Formazione - A.A. 2007/08

TRASFORMAZIONI DI VARIABILI

- Esercizio. Supponiamo che un campionamento sulla qualità dell'aria a Verona e Trento abbia stimato i seguenti livelli di particolato atmosferico:
  - a Verona: PM10 = 40 μg/m3
PM2.5 = 1,7 μg/m3
  - a Trento: PM10 = 60 μg/m3
PM2.5 = 0,5 μg/m3

  Secondo la normativa vigente, Trento è la città con l'aria più inquinata.
  Qual'è invece l'aria più pericolosa per la salute, secondo il nostro indice Ipts?

$$I_{PTS} = \sum_{j=1}^{2} \frac{x_j - \mu_j}{\sigma_j} w_j \Bigg/ \sum_{j=1}^{2} w_j$$

agente	media	sqm	w(j)
PM10	10	20	1
PM2.5	0,1	0,5	64

- Prospetto di calcolo:

agente	media	sqm	w	Verona	Trento	z VR	z TN	zw VR	zw TN
PM>2.5	10	20	1	38,30	59,50	1,42	2,48	1,42	2,48
PM<2.5	0,1	0,5	64	1,70	0,50	3,20	0,80	204,80	51,20
PM10			65	40,00	60,00	2,31	1,64	3,17	0,83