La Teoria dei Giochi

A cura di Giulio Fezzi

Corso di Istituzioni di Economia

Università degli Studi di Verona

A.A. 2016 - 2017

CAPITOLO VII

LA TEORIA DEI GIOCHI

7.1 **Introduzione**

La teoria del giochi, anticipata da Leibniz (1710) e da J. Waldegrave (1713), trovò la sua prima articolazione analitica con gli studi di J. Von Neumann (1928) per giungere poi ad una completa sistematizzazione nel saggio "Teoria del giochi e comportamento economico" (1944) ad opera di O. Morgenstern e dello stesso Von Neumann.

Essa si propone di analizzare e risolvere il problema di scelta tra strategie alternative sulla base dei benefici conseguibili al verificarsi di diverse circostanze e, come apparirà evidente nel seguito, possiede una notevole flessibilità di applicazione: dai giochi di società ai negoziati politici, dalle strategie militari alle questioni di interazione su mercati oligopolistici.

7.2 **La matrice delle vincite (o payoff matrix)**

Strumento fondamentale della teoria dei giochi è la matrice delle vincite, o payoff matrix, che evidenzia i diversi benefici (o vincite, o payoff) che avranno i giocatori al verificarsi congiunto delle varie strategie ed eventualità che sono oggetto di scelta.

Può essere utile, a questo proposito, affrontare la materia attraverso un semplice esempio.

Supponiamo che esistano due imprese concorrenti, che chiameremo *A* e *B*, ciascuna delle quali si trova davanti a due possibili strategie. L'impresa *A* può scegliere tra la strategia "diminuire i prezzi" e la strategia "prezzi costanti", mentre l'impresa B tra "differenziare" e "non differenziare" il proprio prodotto. A questo punto assegniamo a ciascuna strategia di A delle vincite a seconda della strategia scelta da B e viceversa. Supponiamo che, quando sceglie "diminuire i prezzi", A ottenga 3 se B sceglie contemporaneamente "differenziare" e 10 se B sceglie, invece, "non differenziare". D'altro lato supponiamo che, quando sceglie "prezzi costanti", A ottenga -3 se B sceglie "differenziare" e 2 se B sceglie "non differenziare". Allo stesso modo assumiamo che, quando sceglie "differenziare", B ottenga -2 se A sceglie "diminuire i prezzi" e 5 se A sceglie, invece, "prezzi costanti". Infine poniamo che, scegliendo "non differenziare", B ottenga 0 quando A sceglie "diminuire i prezzi" e 12 quando A sceglie "prezzi costanti".

Costruiamo ora la matrice delle vincite per questo esempio:

		Impresa B	
		differenz.	**non differenz.**
Impresa A	**diminuire i prezzi**	3, -2	10, 0
	prezzi costanti	-3, 5	2, 12

Il suo funzionamento è molto semplice: ciascuna casella corrispondente all'incrocio di due strategie dei soggetti A e B contiene due numeri, il primo dei quali rappresenta il payoff di A, il secondo dei quali il payoff di B. Sulla scorta di questi valori sarà possibile confrontare le diverse eventualità.

Indicando con A_i le possibili strategie di A, con B_j le possibili strategie di B e con la generica combinazione (a_{ij}, b_{ij}) le vincite di A e B quando A sceglie la generica strategia A_i e B la generica strategia B_j, possiamo scrivere:

		Indiv. B						
		B_1	$\cdots$	B_s	$\cdots$	B_j	$\cdots$	B_n
	A_1	a_{11}, b_{11}	$\cdots$	a_{1s}, b_{1s}	$\cdots$	a_{1j}, b_{1j}	$\cdots$	a_{1n}, b_{1n}
	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
	A_r	a_{r1}, b_{r1}	$\cdots$	a_{rs}, b_{rs}	$\cdots$	a_{rj}, b_{rj}	$\cdots$	a_{rn}, b_{rn}
Indiv. A	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
	A_i	a_{i1}, b_{i1}	$\cdots$	a_{is}, b_{is}	$\cdots$	a_{ij}, b_{ij}	$\cdots$	a_{in}, b_{in}
	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
	A_m	a_{m1}, b_{m1}	$\cdots$	a_{ms}, b_{ms}	$\cdots$	a_{mj}, b_{mj}	$\cdots$	a_{mn}, b_{mn}

7.3 Equilibrio con strategia dominante

Per analizzare questo semplice ma fondamentale caso della teoria dei giochi, riferiamoci all'esempio precedente cercando di comprendere cosa avverrà nel caso sopra illustrato, ovvero come sceglieranno i due individui.

Si può notare che A ottiene vincite maggiori nel caso in cui scelga la strategia "diminuire i prezzi", indipendentemente da quello che sceglierà B. Le sue vincite sono, infatti, $3 > -3$, nel caso in cui B scelga "differenziare", e $10 > 2$ nel caso in cui B scelga "non differenziare". Possiamo concludere che l'impresa A sceglierà la strategia "diminuire i prezzi" in ogni caso, indipendentemente da ciò che farà B.

Allo stesso modo l'impresa B sceglierà comunque la strategia "non differenziare" indipendentemente da ciò che sceglierà A, perché essa gli permette di ottenere $0 > -2$ nel caso in cui A scelga "diminuire i prezzi", ovvero $12 > 5$ nel caso in cui A scelga "prezzi costanti".

Si può concludere che la soluzione di questo problema di decisione è rappresentata dalla combinazione delle strategie "diminuire i prezzi"-"non differenziare" che restituisce ai giocatori un payoff di (10, 0).

Nel procedere alle loro scelte le due imprese sono a conoscenza esclusivamente delle loro vincite e non si curano in alcun modo della soddisfazione collettiva che, nel nostro caso, sarebbe sicuramente maggiore in corrispondenza della combinazione "prezzi costanti"-"non differenziare" che offre una vincita complessivamente superiore a quella della combinazione che verrà, invece, scelta: (2, 12) contro (10, 0).

Una situazione quale quella descritta sopra viene generalmente indicata con il termine di *equilibrio con strategia dominante*. Si parlerà di equilibrio con strategia dominante tutte le volte che ciascun giocatore è in grado di scegliere una strategia precisa indipendentemente da quello che sceglieranno gli altri giocatori. Si tratta, naturalmente, di situazioni eccezionali che non si verificano molto spesso nella realtà delle cose ma che sono estremamente utili ed interessanti per approcciare abbastanza linearmente le problematiche di decisione.

In simboli si ha equilibrio con strategia dominante in corrispondenza della combinazione di strategie (A_r, B_s) quando:

$$a_{rj} > a_{ij} \quad \forall_{i=1,2,\dots,m \;\; i \neq r} \quad \forall_{j=1,2,\dots,n}$$

e, contemporaneamente:

$$b_{is} > b_{ij} \quad \forall_{i=1,2,\dots,m} \quad \forall_{j=1,2,\dots,n \;\; j \neq s}$$

ottenendo, pertanto, un payoff di (a_{rs}, b_{rs}).

Il concetto di dominanza stretta in strategie pure permette di risolvere con successo una più ampia gamma di giochi attraverso un *processo iterativo di eliminazione di strategie strettamente dominate*. L'individuazione di una strategia strettamente dominata da un'altra permette di eliminare la prima, che non verrebbe in nessun caso scelta, riducendo la complessità del gioco.

Si consideri l'esempio riportato nella seguente matrice delle vincite, che costituisce un'ulteriore variante del problema delle quote di mercato. Le due imprese si trovano a fronteggiare ciascuna tre strategie. L'impresa *A* sta valutando alcune strategie di prezzo: diminuire i prezzi, tenerli costanti o aumentarli. L'impresa B sta invece ragionando in termini di differenziazione dei propri prodotti e deve scegliere tra: differenziare un prodotto, differenziarne due oppure tre.

			Impresa B	
		1D	***2D***	***3D***
	DP	7, 6	6, 8	5, 10
Impresa A	***CP***	5, 10	4, 9	3, 4
	AP	3, 14	7, 10	1, 12

Nella variante proposta nessuna delle strategie indicate risponde alla definizione di dominanza stretta. Per quanto riguarda l'impresa *A*, la strategia *DP* domina la strategia *CP*, ma non la strategia *AP*. Quanto all'impresa *B*, nessuna delle sue strategie ne domina strettamente un'altra.

Se è vero che non esiste una strategia dominante né per l'impresa A né per l'impresa B, è altrettanto vero che l'impresa A non sceglierà mai la strategia CP, strettamente dominata dalla strategia DP. La strategia CP può allora essere eliminata dalla matrice delle vincite, che si riduce alla forma:

		Impresa B		
		1D	***2D***	***3D***
	DP	7, 6	6, 8	5, 10
Impresa A	***CP***			
	AP	3, 14	7, 10	1, 12

L'impresa B, grazie all'eliminazione della riga CP, presenta ora una strategia, la strategia $2D$, strettamente dominata dalla strategia $3D$. La strategia $2D$ non sarà mai scelta dall'impresa B e può essere cancellata. La matrice dei *payoff* assume la forma:

		Impresa B		
		1D	***2D***	***3D***
	DP	7, 6		5, 10
Impresa A	***CP***			
	AP	3, 14		1, 12

Nella nuova configurazione emerge una strategia dominante per l'impresa A, la strategia DP, mentre nulla di definitivo si può dire per l'impresa B. L'eliminazione della strategia AP conduce allo schema:

		Impresa B		
		1D	***2D***	***3D***
	DP	7, 6		5, 10
Impresa A	***CP***			
	AP			

L'impresa *A* ha ormai scelto la sua strategia vincente, la strategia *DP*, e l'impresa *B* trova vantaggioso optare per la strategia 3*D*.

		Impresa B		
		1D	***2D***	***3D***
	DP			5, 10
Impresa A	***CP***			
	AP			

Il risultato finale è mostrato nella precedente tabella, dove la coppia di strategie "diminuire il prezzo" – "tre prodotti differenziati" costituisce la soluzione del problema, ovvero la soluzione di equilibrio.

Il procedimento applicato è generalmente noto come *eliminazione iterata di strategie strettamente dominate*. Esso, al fine di essere rigorosamente corretto, prevede l'ipotesi esplicita che la *razionalità* dei giocatori sia *conoscenza comune (common knowledge)* (Aumann, 1976). Si tratta cioè di assumere che tutti i giocatori siano razionali e inoltre che tutti i giocatori sappiano che tutti i giocatori sono razionali.

7.4 **Equilibrio di Nash**

L'equilibrio con strategia dominante, pur essendo molto esplicativo qualora si verifichi, è, purtroppo, molto raro. Supponiamo, infatti, di trovarci dinanzi ad una situazione del tipo rappresentato nella seguente tabella:

		Impresa B	
		differenz.	**non differenz.**
Impresa A	**diminuire i prezzi**	5, 2	1, 1
	prezzi costanti	1, 1	2, 5

Appare evidente l'assenza di una qualsivoglia strategia dominante tanto per l'impresa *A* quanto per l'impresa *B*: quando *A* sceglie "diminuire i prezzi" la vincita di *B* è o 2 o 1, quando A sceglie "prezzi costanti" la vincita di *B* è, rispettivamente, o 1 o 5. Pertanto la decisione massimizzante per B dipende da quello che sceglierà *A*.

Si tratta, allora, di accontentarsi che la scelta di *B* non sia la migliore in assoluto; ovvero per qualsivoglia scelta di *A*, bensì sia la scelta massimizzante in corrispondenza delle scelte massimizzanti di *A* e, naturalmente, viceversa.

Per *equilibrio di Nash* si intende, allora, una coppia di strategie in corrispondenza della quale la scelta di *A* è ottima data la scelta di *B* e la scelta di *B* è ottima data la scelta di *A*.

Bisogna ricordare che nessun giocatore, a questo livello, conosce quale sarà la mossa dell'altro e, pertanto, può limitarsi ad effettuare delle congetture circa le strategie dell'avversario. I giocatori hanno, cioè, delle aspettative circa le scelte dell'avversario.

Per quanto riguarda l'esempio sopra riportato la coppia di strategie "diminuire i prezzi"-"differenziare" costituisce un equilibrio di Nash. Se infatti l'impresa A sceglie "diminuire i prezzi" la scelta ottima per l'impresa *B* sarà "differenziare" garantendo, questa, un payoff di 2 piuttosto che 1 e, allo stesso modo, se l'impresa *B* sceglie "differenziare" la scelta ottima per *A* sarà "diminuire i prezzi" guadagnando, così, 5 invece di 1.

Possiamo cioè dire che se *A* sceglierà "diminuire i prezzi" *B* sceglierà "differenziare" e, d'altra parte, se *B* sceglierà "differenziare" *A* sceglierà "diminuire i prezzi". Per cui ciascun individuo sceglie la propria strategia ottima data la scelta dell'avversario, ovvero a seconda delle aspettative che ha circa la scelta dell'avversario: si tratta di un equilibrio di Nash.

Si osserva che, data la particolare forma "simmetrica" del gioco presentato nell'esempio numerico, esiste un'altra coppia di strategie in corrispondenza della quale si verifica un equilibrio di Nash. Stiamo parlando della coppia "prezzi costanti"-"non differenziare" per la quale è possibile ripetere per intero il ragionamento già fatto con riferimento alle strategie "diminuire i prezzi"-"differenziare".

Il procedimento tecnico per l'individuazione di equilibri di Nash prevede di evidenziare per ogni strategia di *B* (colonna) il miglior risultato per *A* (riga), e per ogni strategia di *A* (riga) il miglior risultato per *B* (colonna). La cella o le celle in cui entrambi i risultati sono evidenziati costituiscono equilibri di Nash.

Consideriamo il caso in cui due imprese si trovino a fronteggiare ciascuna tre strategie. L'impresa *A* sta valutando alcune strategie di prezzo: diminuire i prezzi, tenerli costanti o aumentarli. L'impresa B sta invece ragionando in termini di differenziazione dei propri prodotti e deve scegliere tra: differenziare un prodotto, differenziarne due oppure tre. L'esempio è riportato nella seguente tabella:

		Impresa B		
		1D	***2D***	***3D***
	DP	$\boxed{7}$, $\boxed{4}$	2, 3	3, 2
Impresa A	***CP***	5, 5	$\boxed{4}$, 2	5, $\boxed{6}$
	AP	2, 3	3, $\boxed{6}$	$\boxed{6}$, 2

La coppia di strategie "diminuire i prezzi" – "un unico prodotto" costituisce un equilibrio di Nash. Se infatti l'impresa *A* scegliesse "diminuire i prezzi", la scelta ottima per l'impresa *B* sarebbe quella di produrre "un unico prodotto", garantendo questa scelta una quota di mercato del 4% piuttosto che del 3% o del 2%. Allo stesso modo, se l'impresa *B* scegliesse di produrre "un unico prodotto", la scelta ottima per *A* sarebbe "diminuire i prezzi", ottenendo una quota di mercato del 7% piuttosto che del 5% o del 2%. Ciascuna impresa sceglie la propria strategia ottima nella previsione che la scelta dell'avversario sia una scelta massimizzante.

In simboli si ha equilibrio di Nash in corrispondenza della coppia di strategie (A_r, B_s) quando:

1. se A sceglie la strategia A_r, si verifica che:

$b_{rs} > b_{rj} \qquad \forall_{j=1,2,\dots,n \quad j \neq s}$

e, contemporaneamente,

2. se B sceglie la strategia B_s, si verifica che:

$a_{rs} > a_{is} \qquad \forall_{i=1,2,\dots,m \quad i \neq r}$

Volendo fare un riferimento alla analisi microeconomica tradizionale appare evidente che il concetto dell'equilibrio di Nash è applicabile strettamente al caso del modello del duopolio di Cournot. In questa situazione si verifica infatti che ciascuno dei duopolisti massimizza il proprio profitto sulla base delle scelte produttive dell'altro e, in particolar modo, sulle aspettative che egli ha circa la produzione del concorrente. Il sunto grafico di queste proposizioni è rappresentato certamente dalle curve di reazione che rappresentano la produzione che ciascuna impresa duopolista deve realizzare per massimizzare il profitto al variare delle aspettative circa la produzione dell'altro duopolista.

Pertanto l'equilibrio che si viene a verificare nel caso di duopolio di Cournot è esattamente corrispondente ad un equilibrio di Nash.

7.4.1 Il dilemma del prigioniero

Studiando la teoria dei giochi è impossibile non far riferimento al celebre esempio del dilemma del prigioniero, a partire dal quale è possibile rilevare tutta una serie di problematiche che hanno avuto un ruolo essenziale nell'approfondimento della teoria in esame, nonché di alcuni aspetti della microeconomia tradizionale.

La storia che dà nome al gioco è la seguente.

La polizia ha arrestato due individui indiziati di aver commesso un crimine (e che, in realtà, hanno effettivamente compiuto). Tuttavia la polizia non ha in mano elementi sufficienti per incriminarli ufficialmente e deve pertanto rilasciare i due indiziati a meno che uno di loro confessi il crimine compiuto insieme all'altro.

I due vengono allora posti in celle separate ed a ciascuno disgiuntamente la polizia propone di denunciare se stesso e il proprio complice confessando il crimine. Se nessuno dei due confessa, implicando anche l'altro, allora saranno trattenuti in attesa di giudizio per il tempo massimo consentito dalla legge e poi, necessariamente, rilasciati. Se uno solo dei due confessa, questo sarà rilasciato in virtù della collaborazione prestata mentre all'altro il giudice applicherà la massima pena di legge. Se entrambi confessano, andranno tutti e due in prigione ma otterranno sicuramente uno sconto di pena per il fatto di aver prontamente cooperato con la polizia.

La storia che abbiamo sopra riportato può essere riassunta nella seguente matrice delle vincite:

		Prigioniero B	
		confessare	**negare**
Prigioniero A	**confessare**	$\boxed{-5}$, $\boxed{-5}$	$\boxed{0}$, -10
	negare	-10, $\boxed{0}$	-1, -1

Ciascun prigioniero può ordinare le proprie alternative a partire da quella con soddisfazione maggiore nel seguente modo:

1. confessare nell'eventualità che l'altro neghi, venendo così rilasciato immediatamente;

2. negare nell'eventualità che anche l'altro neghi, rimanendo così agli arresti solo per un mese (-1);

3. confessare quando anche l'altro confessa, avendo così la pena scontata a soli cinque mesi (-5);

4. negare quando l'altro confessa, scontando così l'intera pena di dieci mese (-10).

Il problema della scelta sarebbe di facile soluzione per i due prigionieri se potessero accordarsi *(gioco cooperativo)*, fossero in grado di conoscere la scelta dell'altro prima di effettuare la propria (*gioco sequenziale*) o potessero ripetere più volte il gioco stesso (*gioco ripetuto*). Tuttavia, per il momento, la situazione da considerarsi è quella dell'esempio in cui le decisioni devono essere disgiunte e simultanee e il gioco eseguito una sola volta.

Ciascun prigioniero si trova dinanzi una matrice dei payoff come quella sopra riportata e, in base ai ragionamenti effettuati nei paragrafi precedenti, è semplice individuare un equilibrio di Nash nella coppia di strategie "confessare"-"confessare". Infatti se *B* si attende che *A* confessi, allora sarà portato anch'egli a confessare e, viceversa, se *A* si attende che *B* confessi anch'egli confesserà: il payoff sarà (-5, -5).

A ben vedere l'equilibrio così raggiunto non è semplicemente un equilibrio di Nash, ma è addirittura un equilibrio con strategia dominante, parendo evidente che qualunque cosa faccia l'altro prigioniero a ciascuno dei due conviene comunque confessare.

Altrettanto evidente è che ai due prigionieri converrebbe scegliere la coppia di strategie "negare"-"negare" con il suo payoff di (-1, -1). Tuttavia, per tornare ad un problema sollevato poco sopra, i due prigionieri non possono in alcun modo cooperare e, pertanto, seguendo la semplice razionalità del gioco andranno a scegliere una combinazione di strategie di equilibrio non efficiente.

Il dilemma del prigioniero trova applicazione in un'ampia gamma di fenomeni economici e politici.

Consideriamo due imprese che producono e vendono un prodotto simile. Ogni impresa potrebbe cercare di incrementare i propri profitti a spese del rivale aumentando le spese pubblicitarie, ma se entrambe adottano la stessa strategia si ritrovano con profitti inferiori a quelli che avrebbero potuto ottenere se avessero raggiunto un accordo vincolante (o qualche forma di collusione) per limitare le spese pubblicitarie.

Allo stesso modo si potrebbe pensare a due paesi che intrattengono relazioni commerciali. Sulla base del comportamento dell'altro paese, ciascuno di essi può introdurre misure protezionistiche che, in alcuni casi, lo avvantaggeranno. Tuttavia se entrambi i paesi sollevassero ingenti barriere commerciali, con tutta probabilità, il benessere complessivo in entrambi i paesi ne verrebbe ad essere notevolmente ridotto.

Un terzo esempio illuminante potrebbe essere quello di due superpotenze nucleari che siano in procinto di scegliere tra le due strategie di installare nuovi missili e non installarli, destinando la quota parte di spesa ad attività di tipo umanitario. A questo punto, anche la storia ce lo insegna, se uno dei due stati decide di installare nuovi missili anche l'altro farà lo stesso, pur essendo evidente che la miglior strategia sarebbe quella di non installarne alcuno. Nuovamente sarebbe conveniente, qualora ve ne fosse la possibilità, stilare un accordo vincolante tra le due superpotenze in base al quale esse si impegnino a non installare alcun missile traendone, così, un notevole beneficio.

Come abbiamo visto il dilemma del prigioniero ha sollevato tutta una serie di problemi relativamente alle modalità di scelta, regole del gioco, dinamica temporale, ... di cui proveremo a dare una breve esplicazione nel seguito.

7.4.2 Il gioco delle coppie

Un altro esempio, meno comune del precedente, ma comunque interessante perché applicabile facilmente alle problematiche di teoria economica è rappresentato dal cosiddetto *gioco delle coppie*. La storia in esso rappresentata è la seguente. Marito e moglie devono concordare come trascorrere il sabato sera. Il marito vorrebbe andare ad un incontro di pugilato, mentre la moglie preferirebbe recarsi a teatro per assistere ad un balletto. Tuttavia ciascuno di essi preferisce trascorrere il sabato sera insieme all'altro piuttosto che in solitudine, attribuendo al fatto di stare insieme al coniuge un valore superiore a quello del suo intrattenimento preferito.

Possiamo dare una rappresentazione schematica della situazione precedente attraverso la seguente matrice dei payoff:

		Marito	
		pugilato	**balletto**
Moglie	**pugilato**	$\boxed{6}, \boxed{7}$	0, 0
	balletto	2, 2	$\boxed{7}, \boxed{6}$

Le alternative preferite sono proprio quelle che vedono i coniugi rimanere insieme per trascorrere la serata di sabato, ovvero si verificano due situazioni di equilibrio di Nash in corrispondenza delle coppie di strategie "pugilato"-"pugilato" e "balletto"-"balletto".

Questo tipo di gioco può essere utilizzato per rappresentare una molteplicità di situazioni economiche in cui due o più giocatori trovano migliore coordinare le proprie azioni anche se hanno idee diverse circa il modo di coordinarle. Nell'esempio moglie e marito trovano che sia meglio trascorrere la serata insieme anche se, comunque, l'uno preferirebbe andare insieme all'incontro di pugilato e l'altra al balletto.

Un importante riferimento può essere trovato nell'ambito dell'economia industriale, laddove due imprese adottino una strategia di divisione del mercato, ovvero due produttori di beni complementari debbano scegliere degli standard comuni da adottare.

Con riferimento, invece, alla scienza delle finanze si può ricordare la situazione di due autorità fiscali confinanti che decidano di coordinare le loro politiche impositive al fine di evitare che gli operatori economici possano trarre vantaggio da eventuali differenze diminuendo, così, il gettito. Naturalmente il problema non si porrebbe

Un ultimo riferimento può essere fatto a quelle situazioni di contrattazione collettiva in cui tanto il sindacato quanto gli imprenditori preferiscano arrivare ad un accordo piuttosto che gettare le basi per uno sciopero, pur desiderando ciascuna parte che siano le proprie condizioni ad avere la meglio.

7.5 **Giochi cooperativi**

In questo paragrafo vogliamo offrire una piccola riflessione sulle conseguenze che ha sugli strumenti operativi della teoria dei giochi l'ammissione della possibilità per i giocatori di concordare assieme le decisioni.

Per fare questo ci riferiremo essenzialmente all'esempio del dilemma del prigioniero riportato sopra. In quella situazione appare evidente che, se solo i due prigionieri potessero parlarsi per concordare insieme le proprie strategie ovvero *per cooperare*, le loro decisioni finali sarebbero ben diverse.

Infatti in questa circostanza il risultato della loro cooperazione si tradurrebbe sicuramente nella scelta di negare entrambi che, come abbiamo visto, fornirebbe il miglior payoff possibile (-1, -1).

Pare evidente che, pertanto, davanti alla possibilità di cooperare sia ben possibile che cadano tutte le considerazioni che potrebbero essere fatte circa l'esistenza di eventuali equilibri di Nash o addirittura, come è nel caso del dilemma del prigioniero, di equilibri con strategia dominante.

Già da queste poche considerazioni emerge con prepotenza la portata dirompente della cooperazione tra i giocatori nell'ambito della tradizionale teoria dei giochi di tipo non cooperativo.

Non potremmo passare sotto silenzio l'importante riferimento alla teoria microeconomica dell'oligopolio (duopolio) di collusione. Nella circostanza in cui alcune (due) imprese oligopoliste (duopoliste) decidano di soprassedere da una strenua competizione su prezzi e quantità, ovvero decidano di colludere (cooperare), si ripete esattamente la situazione dei due prigionieri dell'esempio.

Dalla cooperazione, infatti, tutti gli oligopolisti ne traggono vantaggio potendo produrre ed offrire quantità minori ad un prezzo maggiore conseguendo, di fatto, una certa quota di profitti aggiuntivi tipica di un mercato in monopolio.

7.6 **Giochi ripetuti**

L'esempio del dilemma del prigioniero ci offre una ulteriore possibilità per procedere ancora più a fondo nell'ambito delle diverse vie percorse dalla teoria dei giochi qualora si ammetta la possibilità di giocare lo stesso gioco ripetutamente. Sulla base di queste nuove regole di fondo le strategie migliori, ovvero il modo di scegliere le strategie ritenute migliori, può sicuramente cambiare. Infatti se un prigioniero confessa ad una tornata (round), l'altro potrà rendergli la pariglia tradendolo, a sua volta, nella tornata successiva. Di qui la necessità, per i giocatori, di individuare un modo ottimo di giocare che massimizzi il payoff, per così dire, nel lungo periodo. Nel caso del dilemma del prigioniero, a ciascun giocatore converrà tentare di crearsi, attraverso le scelte ripetute ad ogni round, la reputazione di uno che coopera e non tradisce in modo che anche l'altro pensi bene di cooperare migliorando nettamene la situazione di entrambi.

Tuttavia si è scoperto che la possibilità di rendere efficaci strategie di questo tipo è strettamente dipendente dal fatto che il gioco possa essere ripetuto solo un *numero finito di volte* (ad esempio 10) oppure *indefinitamente*.

Nel primo caso si è rilevato che, non avendo prospettive di lungo periodo, a nessun giocatore apparirà conveniente cercare di convincere l'altro della propria volontà di cooperare dal momento che, dinanzi alla scelta dell'ultima tornata, ciascun giocatore cercherà di ottenere i meglio per sé tradendo l'altro. Il peso della possibilità di essere traditi proprio all'ultimo round, ovvero proprio a quello decisivo, porterà ad inficiare qualunque tentativo di individuare strategie alternative a quella dominante.

Si intuisce già che avrà un'importanza fondamentale il fatto che non esista un "ultimo round", ovvero sia possibile giocare il gioco un numero indefinito di volte.

Se il gioco può effettivamente essere giocato un numero indefinito di volte allora esiste la possibilità che un giocatore, con le sue scelte successive, influisca sul comportamento dell'altro. Si può infatti supporre che, dopo un periodo iniziale di competizione, i due si preoccuperanno dei payoff futuri, cercando la via per migliorarli.

A questo punto si tratta solo di individuare quale sia la strategia di fondo migliore da giocare per influenzare il comportamento dell'altro giocatore e fargli intendere così la disponibilità a cooperare.

Molti studiosi si sono cimentati in questa ricerca ma i risultati più interessanti li ha raggiunti il professor Robert Axelrod, studioso di scienze politiche della University of Michigan. Egli condusse il seguente esperimento: chiese ai più grandi esperti di teoria dei giochi di proporre delle strategie di fondo per giocare il gioco del dilemma del prigioniero un numero indefinito di volte e, quindi, fece "gareggiare" queste proposte su un calcolatore al fine di individuare quella migliore in termini di payoff totale.

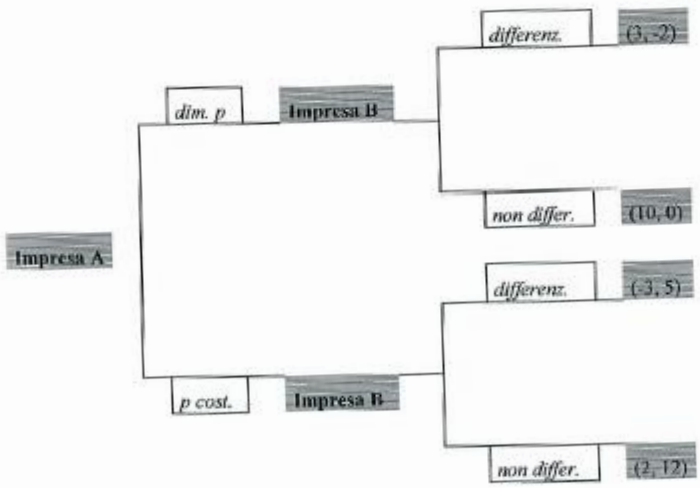
Vinse la strategia più semplice, quella detta del *"colpo su colpo"*. Il suo funzionamento prevede che ciascun giocatore risponda al proprio avversario con la sua stessa mossa: nel primo round si coopera negando e nelle tornate successive si coopera ancora solo se anche l'altro a cooperato alla prima; se l'altro ha tradito allora tradiremo anche noi, e così via rispondendo colpo su colpo.

Questa semplice strategia è efficace e leale. Efficace perché ogni tradimento viene punito immediatamente. Leale perché l'avversario è punito per un suo eventuale tradimento una sola volta e, nel caso torni a cooperare, verrà ricompensato, a sua volta, con la cooperazione.

7.7 Giochi sequenziali

Un ulteriore sviluppo della teoria dei giochi è quello che percorre la strada della non simultaneità tra le scelte dei giocatori. Si ammette, cioè, che un giocatore scelga dopo che ha scelto l'altro, ovvero essendo a conoscenza della scelta dell'avversario.

Possiamo allora riconsiderare l'esempio iniziale supponendo che l'impresa *A* scelga per prima e l'impresa *B* scelga una volta che abbia saputo ciò che ha scelto *A*.



La rappresentazione grafica del gioco prende una forma nuova e molto immediata detta *forma estesa*. Il gioco del secondo paragrafo nella sua forma estesa può essere rappresentato come nella tabella che segue.

L'impresa *B* sceglie quando è già a conoscenza della scelta di *A*. Se, ad esempio, egli sapesse che *A* ha scelto "prezzi costanti" si troverebbe dinanzi all'alternativa "differenziare" con un payoff di 5 oppure "non differenziare" con un payoff di 12. Chiaramente sceglierà la strategia "non differenziare".

Per trovare una soluzione a questo gioco sequenziale in forma estesa si utilizza la metodologia dell'*induzione a ritroso* (*backward induction*). Essa comporta di:

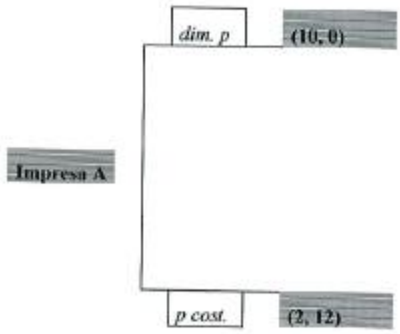
1. esaminare i nodi terminali del gioco;
2. eliminare le azioni strettamente dominate che non saranno certamente giocate, cancellandole dall'albero del gioco;
3. ridisegnare l'albero del gioco;
4. ripetere il processo.

L'idea che sta alla base di questa metodologia è che il giocatore che sceglie per primo fa delle valutazioni circa le scelte del secondo e decide di conseguenza.

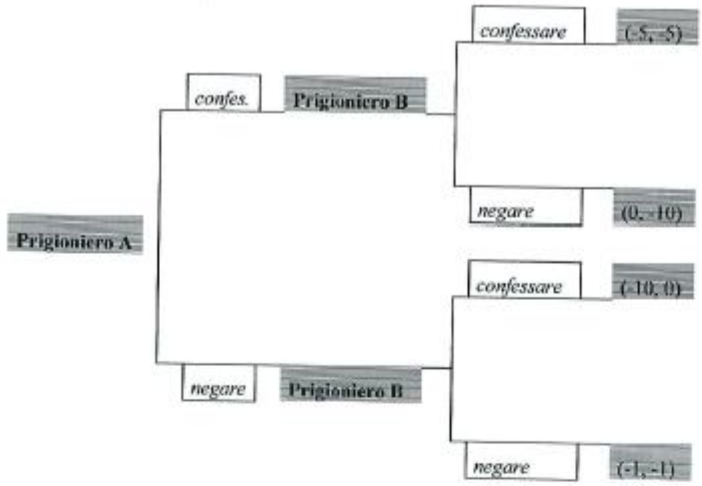
Consideriamo allora i nodi terminali e valutiamo le alternative di *B*. In entrambi i casi all'impresa *B* conviene la strategia "non differenziare" e, quindi, è possibile eliminare dal grafico il ramo "differenziare":

A questo punto sull'albero restano solo le scelte di *A*, poichè la scelta di *B* è già stata individuata. In questa situazione l'impresa *A* opterà per la strategia "diminuire i prezzi" che le assicura 10 piuttosto che 2.

Quindi l'equilibrio del gioco è dato dall'iniziale scelta di *A*, che opterà per "diminuire i prezzi" e la successiva scelta di "non differenziare" da parte dell'impresa *B*.

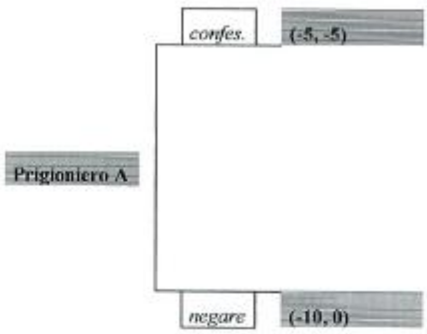


Un'analoga rappresentazione può essere data del dilemma del prigioniero nell'ipotesi che a scegliere per primo sia il prigioniero *A*.



In questa situazione il prigioniero *B* può confessare se ha saputo che anche *A* ha confessato ottenendo un payoff di -5, e pure confessare se ha saputo che *A* ha negato ottenendo un payoff di 0. È evidente che, potendo scegliere dopo aver conosciuto la scelta di *A*, *B* si trovi in una situazione nettamente migliore rispetto a quella delle scelte simultanee presentata nel paragrafo 4.1.

Tuttavia, utilizzando la tecnica della *backward induction*, il prigioniero A farà le seguenti valutazioni. Il prigioniero B, in qualunque posizione si trovi, avrà convenienza a confessare in quanto in un caso avrebbe un risultato di –5>-10 e nell'altro di 0>-1. L'albero del gioco può quindi essere ridotto come segue:



In questa situazione al prigioniero *A* converrà certamente confessare ottenendo un risultato di –5>-10.

L'equilibrio dinamico del gioco vedrà quindi il giocatore *A* scegliere di confessare ed il giocatore *B* rispondere confessando a sua volta.

Relativamente all'analisi microeconomica tradizionale la possibilità di scegliere la propria strategia dopo il rivale richiama direttamente i modelli di oligopolio con leadership di quantità (modello di Stackelberg) e di prezzo. In questi modelli infatti si suppone l'esistenza di un'impresa leader che fissa autonomamente la quantità o il prezzo, rispettivamente, da portare o praticare sul mercato e di poche altre imprese follower che considerano la scelta del leader a posteriori come fosse un dato sul quale esse non possono in alcun modo influire. Per utilizzare il linguaggio di questo paragrafo: il leader sceglie prima dei follower.

7.7.1 Oligopolio con libertà d'entrata: minacce credibili e impegni irrevocabili

In molte situazioni di oligopolio le imprese che già operano sul mercato sono minacciate dal possibile ingresso di nuove aziende concorrenti. Numerosi sono infatti, nella storia economica recente, gli esempi di mercati inizialmente monopolistici o quasi nei quali la facilità di ingresso ha permesso l'entrata di nuovi agguerriti concorrenti. Possiamo ricordare il mercato delle fotocopiatrici su carta comune inizialmente dominato esclusivamente dalla Xerox, oppure il mercato automobilistico interno degli Stati Uniti controllato, agli inizi, da quattro aziende americane e, successivamente, invaso da numerosi produttori stranieri.

In questo paragrafo applicheremo la teoria dei giochi, a titolo di esempio, agli oligopoli caratterizzati da libertà di entrata.

Supponiamo che su un certo mercato operi attualmente un solo produttore (A) che, però, sia minacciato dalla possibilità di ingresso di un concorrente (B), che sta valutando l'opportunità di entrare nel mercato.

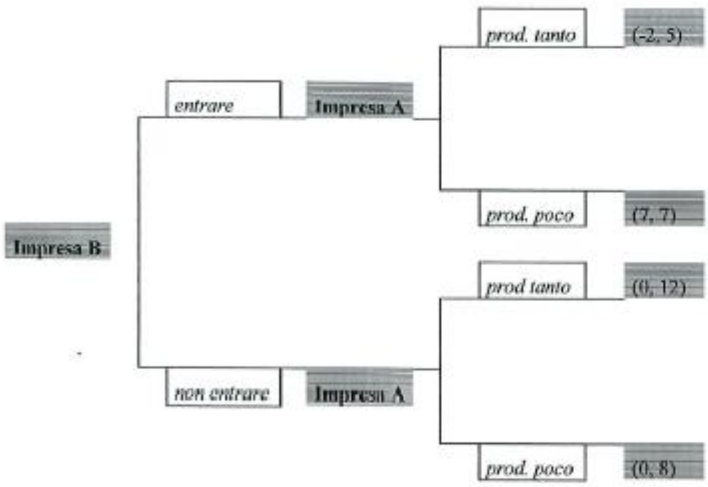
Per poter decidere se entrare o meno sul mercato l'impresa B deve effettuare delle supposizioni sugli equilibri che si potrebbero verificare dopo il suo ingresso. Infatti se essa valutasse che nell'equilibrio che verrebbe a crearsi dopo il suo ingresso ci fossero degli interessanti margini di profitto dovrebbe sicuramente scegliere di entrare, altrimenti sarebbe saggio rimanerne fuori. L'impresa entrante deve perciò elaborare una serie di complesse previsioni su come il produttore già presente sul mercato reagirà al suo ingresso in termini di prezzi praticati, quantità prodotte, campagne pubblicitarie, ...

D'altro canto l'impresa *A* ha tutto l'interesse a spaventare il potenziale entrante, cercando di dissuaderlo con ogni mezzo lecito o illecito. Le misure messe in atto dall'impresa che si deve difendere prendono solitamente la forma di *minacce*. Esse, se accolte nella loro forma lecita, si traducono generalmente nella manifestazione di volontà di produrre quantità molto elevate in modo da far crollare i prezzi nel caso di ingresso del concorrente sul mercato. Tuttavia, affinché sortiscano l'effetto desiderato, occorre che le minacce siano *credibili*. È, cioè, necessario che agli occhi dell'entrante potenziale *B* appaia certo che, nel ipotesi di un suo ingresso sul mercato, l'impresa *A* metterà in atto quanto minacciato. Se così non fosse *B*, attraverso le sue valutazioni e previsioni, potrebbe comprendere il "bluff" di *A* ed entrare ugualmente.

Supponiamo che lo schema in forma estesa del gioco in questione sia quello della figura seguente.

Come appare evidente dal gioco in forma estesa, l'impresa *B* fa la prima mossa e l'impresa *A* modificherà le proprie scelte produttive dopo aver conosciuto le decisioni di *B*.

In particolare l'impresa *B* si trova dinanzi alle due possibili strategie "entrare" o "non entrare", mentre l'impresa *A* può scegliere tra "produrre poco", ovvero continuare a produrre la medesima quantità di prima, o "produrre tanto", mettendo così in atto la minaccia di far crollare i prezzi e spiazzare il potenziale concorrente.



Nel gioco sopra rappresentato sono ravvisabili due situazioni di equilibrio di Nash.

La prima si verifica in corrispondenza della coppia di strategie "non entrare"-"tanto" per la quale il gioco prevede un payoff di (0, 12). Se infatti l'impresa *B* decidesse di entrare ed *A* scegliesse comunque di produrre tanto, essa accuserebbe inevitabilmente una perdita pari a -2.

Il secondo equilibrio avviene per la coppia di strategie "entrare"-"poco" che, come appare dallo schema, paga una vincita di (7, 7).

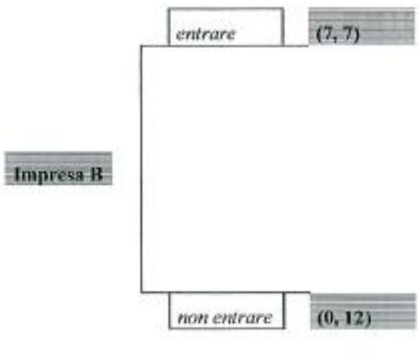
È chiaro che l'impresa *A* preferisce l'alternativa che la vede rimanere da sola sul mercato, mentre l'impresa *B* attribuisce le sue preferenze alla situazione di entrata.

Per comprendere quale sarà la circostanza che si verificherà effettivamente, ovvero l'esito del gioco, dobbiamo esaminare la minaccia che l'impresa A metterà in atto in caso di ingresso di B e verificare se è credibile.

Tale minaccia non è assolutamente credibile in quanto non sarebbe razionale per l'impresa A metterla in atto guadagnando 5, piuttosto che non metterla in atto, lasciando che il concorrente entri nel mercato, e guadagnare 7. Pertanto l'impresa B, sapendo che tale minaccia non verrà mai tradotta in fatti concreti, preferirà guadagnare 7 entrando nel mercato (piuttosto che 0 restandone fuori) e, appunto, deciderà di entrarvi.

Pertanto la strategia globale che dovremo attenderci sarà la seguente: se l'impresa B decide di entrare, l'impresa A produrrà poco, se l'impresa B decide di non entrare, l'impresa A produrrà tanto. Inoltre, considerando la sequenzialità del gioco e la razionalità di entrambe le imprese, è evidente che la situazione di equilibrio perfetto si avrà nella situazione che vede l'impresa B entrare e l'impresa A produrre poco.

Del resto il risultato è immediato se si applica la tecnica della *backward induction.* Tra le opzioni dell'impresa A viene subito eliminata la possibilità "produrre tanto", ed il gioco diventa:

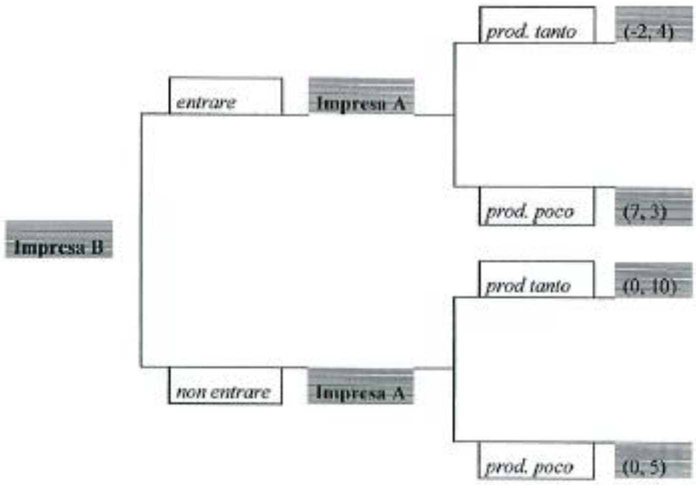


Da cui si evince che la scelta dell'impresa *B* ricadrà sulla strategia "entrare". Quindi *B* entra e *A* produce poco.

Bisogna però considerare la possibilità che l'impresa *A* metta in atto una serie di manovre al fine di rendere più credibile la minaccia. Uno strumento essenziale per supportare di credibilità una minaccia è sicuramente rappresentato dal cosiddetto *impegno irrevocabile* (*commitment*). Si tratta di qualunque meccanismo attraverso il quale un giocatore può modificare in anticipo le proprie vincite in modo, appunto, irrevocabile, in modo che sia obbligato, al verificarsi di certe circostanze, a mettere effettivamente in atto la minaccia.

Nel nostro esempio potremmo considerare il caso in cui l'impresa *A* costruisca un grande impianto che determini un notevole incremento della sua capacità produttiva, ne abbatta i costi marginali di produzione e renda, così, conveniente all'impresa "produrre tanto" all'ingresso di un nuovo produttore sul mercato.

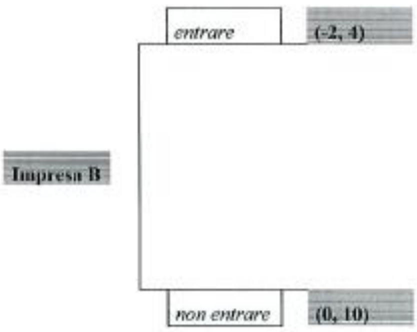
Lo schema del gioco in forma estesa risulterà così modificato:



Come si può notare in questo caso la minaccia dell'impresa *A* di produrre tanto nel caso l'impresa *B* entri sul mercato risulta credibile perché il payoff che consegue all'attuazione della minaccia è superiore a quello della circostanza in cui la minaccia non diviene concreta (4 > 3). L'impresa *B* rinuncerà sicuramente ad entrare perché, in caso contrario, andrebbe sicuramente incontro ad una perdita pari a -2.

In questa situazione si ha equilibrio perfetto solo in corrispondenza della coppia di strategie "non entrare"-"tanto" che paga una vincita di (0, 10).

Infatti, tramite la *backward induction*, il gioco si riduce a:



Da cui è chiaro che la minaccia dell'impresa *A* funzionerà perchè *B* sceglierà sicuramente di non entrare.

La costruzione di un grande impianto non è sicuramente l'unico modo che ha un'impresa che opera da sola su un mercato per rivestire di credibilità le proprie minacce ai potenziali entranti.

Lo stesso effetto potrebbe essere sortito, ad esempio, da una politica di investimento in progetti di ricerca e sviluppo volti alla riduzione dei costi di produzione, ovvero dalla stipula di un contratto con i propri clienti che incorpori l'impegno dell'impresa a superare qualunque offerta che potrebbe fare in futuro qualche suo concorrente.

7.8 **Giochi con strategie miste**

Tutti i tipi di gioco visti fino ad ora (simultanei o sequenziali, non cooperativi o cooperativi, giocati una sola volta o ripetuti) prevedevano che ogni giocatore attuasse la propria scelta e, quindi, vi si attenesse rigidamente. Con riferimento a questo tipo di scelta strategica si suole parlare di *strategia pura*.

Non è tuttavia da passare sotto silenzio la possibilità che i giocatori attribuiscano alle proprie scelte un valore di frequenza relativa, ovvero di *probabilità*, rendendo così di tipo stocastico le proprie strategie.

È il caso in cui un giocatore decide, ad esempio, di giocare per il 70% del tempo una certa strategia e per il restante 30% la sua alternativa. Una strategia di questo genere è detta *strategia mista*.

7.9 **Problemi e prospettive**

"Pochi, per non dire nessuno, dei risultati ottenuti con le analisi di teoria dei giochi sono sorprendenti o misteriosi o complicati; e accade spesso che dopo che un risultato viene reso noto si senta affermare: "Be', tutto sommato mi sembrava di saperlo già". ... Forse

sarebbe più corretto dire "lo sapevo a livello subcosciente" oppure "avrei dovuto intuirlo, è così ovvio". Ma la teoria dei giochi funziona proprio a questo livello di analisi." (David M. Kreps, Teoria dei giochi e modelli economici, Il Mulino, Bologna, 1992).

La teoria dei giochi è stata ed è sicuramente di grande aiuto per gli economisti perché fornisce un linguaggio analitico e preciso attraverso il quale è possibile tradurre in simboli delle idee o dei concetti che paiono intuitivi ma che non sarebbero in alcun modo spiegabili razionalmente. Proprio a motivo di questa sua origine, per così dire, "intuitiva" la teoria dei giochi non ha dato risposte soddisfacenti quando la si è utilizzata in ambiti che trascendevano la sua natura. In particolar modo restano aperte alcune domande che, per il momento, non hanno avuto risposta ma che, d'altro canto, stanno stimolando gli studiosi ad approfondire alcune problematiche ancora inesplorate.

Le questioni ancora dibattute riguardano prevalentemente i seguenti punti:

1. Quali sono le circostanze in cui si rivela efficace ed appropriata un'analisi di equilibrio?

2. Qualora detta analisi di equilibrio non risultasse efficace o fosse priva di significato economico, quale altro tipo di analisi potrebbe essere utilizzata in sua vece?

3. I risultati delle applicazioni sono fortemente dipendenti dalle *regole del gioco* che si suppongono; quali sono i limiti entro i quali si deve muovere colui che queste regole le decide? In quale modo mutano e si evolvono queste regole del gioco?

4. Se l'analisi di equilibrio si rivela appropriata ma ci si trova dinanzi a diverse posizioni di equilibrio, quale si deve scegliere (c.d. problema dei *raffinamenti* del concetto di equilibrio)? Come si possono "contabilizzare" operazioni che fuoriescono dalla logica dell'equilibrio (o degli equilibri) rilevati?

Gli studiosi di teoria dei giochi stanno cercando le risposte a tutti questi interrogativi battendo le strade della razionalità limitata e dell'esperienza. L'idea centrale che li guida è quella di rendere più flessibili gli strumenti operativi dell'analisi assumendo la possibilità che ciascun giocatore effettui delle scelte di breve periodo solidamente ancorate su una strategia di lungo periodo che le rende significative nel loro complesso.

7.10 Applicazioni

7.10.1 L'equilibrio di Nash nell'oligopolio di Cournot

Consideriamo ora un esempio numerico che verifichi l'efficacia degli strumenti della teoria dei giochi in un campo tradizionalmente lasciato ai metodi risolutivi tipici della microeconomia classica.

Supponiamo che su un mercato operino due imprese , le cui funzioni di costo totale siano, rispettivamente, $CT_A = 100 + 5X_A$ e $CT_B = (1/2)X_B^2$. La domanda aggregata del bene x è uguale a $PX = 100 - X$, ovvero $PX = 100 - (X_A + X_B)$.

Proviamo ora a determinare le quantità ottime di produzione di ciascuna impresa nell'ipotesi di comportamento secondo il modello di Cournot.

La metodologia tradizionale, come sopra esposto, prevede di individuare i valori di X_A e X_B che permettono di risolvere il sistema:

$$\begin{cases} RM_A = CM_A \\ RM_B = CM_B \end{cases}$$

che, opportunamente integrato con i dati del problema, diventa:

$$\begin{cases} 100 - 2X_A - X_B = 5 \\ 100 - 2X_B - X_A = X_B \end{cases}$$

da cui è possibile determinare le equazioni delle curve di reazione:

$$\begin{cases} X_A = \dfrac{95 - X_B}{2} \\ X_B = \dfrac{100 - X_A}{3} \end{cases}$$

ed, infine, le quantità ottime da produrre allo scopo di massimizzare il profitto di entrambe le imprese:

$$\begin{cases} X_A = 37 \\ X_B = 21 \end{cases}$$

I profitti così ottenuti sono, rispettivamente, $PRO_A = 1.269$ e $PRO_B = 662$.

Procediamo ora a risolvere il problema attraverso gli strumenti della teoria dei giochi, supponendo di non disporre di alcuna informazione circa la soluzione ottenuta tramite l'applicazione della teoria tradizionale.

Il gioco è composto di due giocatori (le due imprese duopoliste), ciascuna delle quali fronteggia diverse alternative di produzione. Le strategie produttive possono oscillare in un range limitato dal vincolo rappresentato dall'equazione della curva di domanda che vede i prezzi del prodotto andare a zero per produzioni complessivamente pari a 100. La posizione limite è quindi quella in cui una impresa produce 100, ottenendo una perdita pari esattamente ai costi, mentre l'altra esce dal mercato.

I payoff del gioco sono rappresentati dai profitti di ciascuna impresa. In particolare le due funzioni di profitto sono:

$$PRO_A = RT_A - CT_A = 95X_A - X_A^2 - X_A X_B - 100$$

per la prima impresa e:

$$PRO_B = RT_B - CT_B = 100X_B - X_A X_B - \frac{3}{2}X_B^2.$$

In simboli il gioco di Cournot può essere rappresentato sel seguente modo:

		Impresa 2		
		$_1x_2$	$_2x_2$	...
	$_1x_1$	$\pi_{1(1,1)}, \pi_{2(1,1)}$	$\pi_{1(1,2)}, \pi_{2(1,2)}$	...
Impresa 1	$_2x_1$	$\pi_{1(2,1)}, \pi_{2(2,1)}$	$\pi_{1(2,2)}, \pi_{2(2,2)}$	...
	...	...	...	...

Ciascun $\pi_{1(i,j)}$ rappresenta il profitto dell'impresa 1 nel caso in cui essa abbia scelto la strategia di produrre la quantità $_ix_1$ e l'impresa 2 risponda con la produzione $_jx_2$.

Procediamo ora alla costruzione della matrice dei payoff per il problema numerico in discussione. Questa applicazione, fino a qualche decennio fa estremamente complessa, è ora resa agevole dall'utilizzo di comuni strumenti informatici.

Per comodità descrittiva ci limitiamo a riportare i risultati per le alternative produttive dalla $_{20}x_1$ alla $_{50}x_1$ per la prima impresa e dalla $_{18}x_2$ alla $_{23}x_2$ per la seconda.

Nella figura che segue le strategie per riga rappresentano le alternative per l'impresa 1, quelle per colonna sono invece relative all'impresa 2.

Applichiamo ora a questa sezione limitata dell'intera matrice dei payoff del gioco in esame il ragionamento tipico che supporta la ricerca di un equilibrio di Nash. Procediamo quindi per successive iterazioni.

Se la prima impresa sceglie di produrre 20, alla seconda impresa converrà produrre 23 (con un profitto/payoff di 1.047 che è il maggiore per 2 sulla prima riga) e se la seconda impresa produce 23 alla prima conviene invece produrre 36 ottenendo 1.196.

Se la prima impresa produce 36, alla seconda conviene produrre 21 assicurandosi un profitto di 662.

	18		19		20		21		22		23	
20	1.040	954	1.020	979	1.000	1.000	980	1.019	960	1.034	940	1.047
21	1.076	936	1.055	960	1.034	980	1.013	999	992	1.017	971	1.034
22	1.110	918	1.088	941	1.066	960	1.044	977	1.022	990	1.000	1.001
23	1.142	900	1.119	922	1.096	940	1.073	956	1.050	968	1.027	978
24	1.172	882	1.148	903	1.124	920	1.100	935	1.076	946	1.052	955
25	1.200	864	1.175	884	1.150	900	1.125	914	1.100	924	1.075	932
26	1.226	846	1.200	865	1.174	880	1.148	893	1.122	902	1.096	909
27	1.250	828	1.225	846	1.196	860	1.169	872	1.142	880	1.115	886
28	1.272	810	1.244	827	1.216	840	1.188	851	1.160	858	1.132	863
29	1.292	792	1.263	808	1.234	820	1.205	830	1.176	836	1.147	840
30	1.310	774	1.280	789	1.250	800	1.220	809	1.190	814	1.160	817
31	1.326	756	1.295	770	1.264	780	1.233	788	1.202	792	1.171	794
32	1.340	738	1.308	751	1.276	760	1.244	767	1.212	770	1.180	771
33	1.352	720	1.319	732	1.286	740	1.253	746	1.220	748	1.187	748
34	1.362	702	1.328	713	1.294	720	1.260	725	1.226	726	1.192	725
35	1.370	684	1.335	694	1.300	700	1.265	704	1.230	704	1.195	702
36	1.376	666	1.340	675	1.304	680	1.268	683	1.232	682	1.196	679
37	1.380	648	1.343	656	1.306	660	1.269	662	1.232	660	1.195	656
38	1.382	630	1.344	637	1.306	640	1.268	641	1.230	638	1.192	633
39	1.382	612	1.343	618	1.304	620	1.265	620	1.226	616	1.187	610
40	1.380	594	1.340	599	1.300	600	1.260	599	1.220	594	1.180	587
41	1.376	576	1.335	580	1.294	580	1.253	578	1.212	572	1.171	564
42	1.370	558	1.328	561	1.286	560	1.244	557	1.202	550	1.160	541
43	1.362	540	1.319	542	1.276	540	1.233	536	1.190	528	1.147	518
44	1.352	522	1.308	523	1.264	520	1.220	515	1.176	506	1.132	495
45	1.340	504	1.295	504	1.250	500	1.205	494	1.160	484	1.115	472
46	1.326	486	1.280	485	1.234	480	1.188	473	1.142	462	1.096	449
47	1.310	468	1.263	466	1.216	460	1.169	452	1.122	440	1.075	426
48	1.292	450	1.244	447	1.196	440	1.148	431	1.100	418	1.052	403
49	1.272	432	1.223	428	1.174	420	1.125	410	1.076	398	1.027	380
50	1.250	414	1.200	409	1.150	400	1.100	389	1.050	374	1.000	357

Se la seconda impresa produce 21 alla prima conviene optare per 37 ottenendo 1.269 e, allo stesso tempo, se la prima produce 37 alla seconda impresa conviene proprio produrre 21 con il massimo risultato della riga. Pertanto in corrispondenza della coppia di strategie (37, 21), in perfetta coincidenza con l'equilibrio di Cournot determinato in precedenza con le tecniche tradizionali, si verifica l'esistenza di un Equilibrio di Nash che assicura il massimo payoff di equilibrio per le due imprese duopoliste, ovvero (1.269, 662).

Resta quindi verificata la perfetta corrispondenza tra equilibrio di Cournot ed equilibrio di Nash per il caso di duopolio con determinazione simultanea delle quantità pervenendo allo stesso risultato sia tramite le tecniche della microeconomia classica che attraverso l'utilizzo degli strumenti tipici della teoria dei giochi.

7.10.2 L'equilibrio di Nash nella coordinazione delle politiche fiscali e monetarie.

Alan Blinder, per molti anni membro della facoltà di economia di Princeton (dove lavorarono tra gli altri Von Neumann, Morgenstern e Nash), co-autore di un noto testo di economia e vicepresidente del Federal Reserve Board dal 1994 al 1996, produsse un interessante esempio di teoria dei giochi applicata alla realtà macroeconomica di uno stato democratico.

L'esempio in questione apparve per la prima volta in un saggio pubblicato nel 1982. Il soggetto principale dello scritto consisteva nell'indagine su un possibile coordinamento tra la politica monetaria, che riguarda il controllo dei tassi di interesse a breve e l'offerta di moneta, e la politica fiscale, che agisce sulle variabili della spesa pubblica e degli introiti fiscali riassunti dall'avanzo o disavanzo del bilancio dello stato.

Si tratta pertanto di costruire un gioco costituito di due giocatori, le autorità politiche con delega operativa sulla spesa pubblica e le autorità monetarie (nell'esempio di Blinder la FED).

Le autorità monetarie perseguono come principale scopo il contenimento dell'inflazione, preferendo pertanto una politica di tipo restrittivo rispetto ad una incontrollata espansione. Per meglio comprendere la situazione dobbiamo ricordare che i funzionari della FED hanno un mandato a lungo termine (14 anni per i membri del Board e fino al pensionamento i presidenti delle Federal reserve Banks) e, conseguentemente, godono di una consistente autonomia dal potere politico.

I politici, dal canto loro, sono periodicamente sottoposti all'esame elettorale e, pertanto, sono generalmente favorevoli a politiche economiche espansive piuttosto che restrittive.

Già da queste prime battute si nota che la situazione decisionale che si sta affrontando presenta i tipici caratteri di un gioco ad interessi contrapposti. In particolare il cardine di questo gioco consiste, per ciascun giocatore, nel cercare di spingere l'altro verso scelte a non gradite. La FED preferisce sicuramente una politica fiscale di avanzo di bilancio con introiti fiscali superiori alla spesa pubblica. Infatti un avanzo di bilancio consente di mantenere sotto controllo le pressioni inflazionistiche senza rendere necessario alcun intervento di politica monetaria restrittiva da parte della FED che potrà conservare intatto il proprio prestigio ed il favore della popolazione.

Per contro le autorità politiche, su cui pende il giudizio elettorale, preferiscono favorire politiche economiche espansive. Tuttavia la preferenza ricade sulla situazione in cui l'espansione è ascrivibile alle autorità monetarie potendo i politici raggiungere i propri obiettivi senza assumersene le corrispettive responsabilità. La speranza dei politici è che, quindi, la FED adotti una politica monetaria espansiva di riduzione dei tassi e di corrispondente incremento dell'offerta di moneta. Tale pratica, pur aprendo al rischio inflazionistico, consentirebbe di stimolare l'attività produttiva ed imprenditoriale e di aumentare corrispondentemente l'occupazione. Inoltre il Congresso ed il Presidente potrebbero evitare di dover ricorrere al deficit spending.

Il fatto centrale è che nessun giocatore vuole fare quello che l'altro vuole che egli faccia.

Blinder presentò l'esempio in questione procedendo ad una semplificazione della situazione. Ciascuno dei due giocatori fronteggia tre alternative:

1. adottare una politica restrittiva (contract);
2. non fare nulla (do nothing);

3. adottare una politica espansiva (expand).

Di conseguenza i possibili risultati per ciascun giocatore si riducono a nove e, per ripetere l'esempio di Blinder, essi sono ordinati secondo la preferenza dei giocatori in base ai valori di payoff che vanno da 1 a 9. Il valore 9 indica la massi ma utilità, mentre il valore 1 la minima.

L'esempio descritto e limitato allo spazio di strategie sopra riportato è rappresentato qui di seguito:

		FED		
		Contract	*Do nothing*	*Expand*
	Contract	1, 7	4, $\boxed{9}$	6, 6
Politicians	*Do nothing*	2, $\boxed{8}$	5, 5	$\boxed{9}$, 4
	Expand	$\boxed{3}$, $\boxed{3}$	$\boxed{7}$, 2	8, 1

Per quanto riguarda la FED appare evidente che le maggiori preferenze ricadano nelle celle in cui le iniziative di tipo restrittivo sono demandate ai politici. Approfondendo l'analisi si verifica che la FED non adotterà mai politiche monetarie espansive essendo la strategia *Expand* strettamente dominata sia da *Contract* che da *Do Nothing*.

Se osserviamo, invece, i payoff delle autorità politiche notiamo che la preferenza ricade sulle situazioni in cui la scelta espansiva viene assunta dalle autorità monetarie (il che, come abbiamo appena evidenziato, è impossibile). Inoltre è certo che i politici non adotteranno mai la strategia *Contract* che è strettamente dominata da entrambe le altre.

Di conseguenza, procedendo tramite l'eliminazione iterata di strategie strettamente dominate, il gioco può essere opportunamente ridotto a quanto riportato nella figura che segue.

L'equilibrio del gioco viene raggiunto in corrispondenza della coppia di strategie *Expand* per i politici e *Contract* per la FED. Tale posizione di equilibrio è un equilibrio di Nash per il gioco originario, mentre è addirittura un equilibrio con strategia dominante nella situazione ridotta. La situazione è proprio quella che si verificò nel corso della presidenza Reagan, quando Blinder scrisse il suo saggio.

		FED		
		Contract	*Do nothing*	*Expand*
	Contract			
Politicians	*Do nothing*	2, 8	5, 5	
	Expand	3, 3	7, 2	

Viene così confermata la proposizione iniziale per cui le autorità monetarie adotteranno comunque una politica monetaria restrittiva ed i politici espanderanno la spesa. Ciascun giocatore si muove pertanto secondo i propri interessi perdendo di vista il bene comune.

L'esempio di Blinder è, infatti, un'illuminante applicazione del dilemma del prigioniero. Se infatti sono rispettate le regole del gioco non cooperativo e simultaneo ciascun giocatore, alla ricerca di un equilibrio di tipo individualistico, sceglie la propria strategia tipica che, nel complesso, risulta essere la peggiore.

La non efficienza dell'equilibrio raggiunto appare evidente se costruiamo una matrice dei payoff complessivi che, se vogliamo, rappresenta il vantaggio ottenuto dalla collettività. Tale matrice dei payoff "sociali" è riportata nella figura che segue.

I payoff di detta matrice sono determinati sommando i singoli payoff del caso del gioco individualistico.

Si rileva immediatamente che la posizione di equilibrio precedentemente raggiunta è nettamente la peggiore, garantendo un payoff complessivo di 6 che è ampiamente il più basso tra tutte le possibili combinazioni strategiche.

Il migliore equilibrio complessivo si ha in corrispondenza delle quattro celle in alto a destra della matrice che vedono i politici e le autorità monetarie non applicare le proprie strategie tipiche ma, anzi, collaborare o, tuttalpiù, rimanere inattivi.

		FED		
		Contract	*Do nothing*	*Expand*
	Contract	8	13	12
Politicians	*Do nothing*	10	10	13
	Expand	6	9	9

Nella realtà dei fatti tale genere di collaborazione si è, fortunatamente, verificato con una certa frequenza. Accade cioè spesso che l'equilibrio del gioco di politica fiscale e monetaria si posizioni al di fuori del caratteristico equilibrio di Nash inefficiente. Una tale situazione si verificò nel 1994 quando la politica FED era fortemente restrittiva e non vide alcuna opposizione espansiva da parte delle autorità politiche che rimasero neutrali.

7.10.3 Le politiche pubblicitarie

Per meglio comprendere la realtà di un gioco in forma normale con equilibrio di Nash nel dilemma del prigioniero si consideri il caso di interazione tra due imprese, 1 e 2, in un mercato di duopolio. In particolare si ponga attenzione alle scelte delle due imprese in fatto di politiche pubblicitarie.

Nello sviluppo del modello sono valide le seguenti assunzioni:

1. Le due imprese vendono sul mercato un bene allo stesso prezzo fissato esogenamente;

2. La pubblicità in sé non ha alcun impatto sul livello di domanda complessiva del mercato: la quantità totale venduta è la medesima per qualunque livello di spesa pubblicitaria;

3. Ciascuna impresa sceglie tra due livelli di spesa pubblicitaria: alto (H) e basso (L);

4. La quota di mercato di ciascuna impresa dipende dal livello relativo di spesa pubblicitaria.

Traduciamo ora le assunzioni fatte nella simbologia della teoria dei giochi. Ciascuna delle due imprese (giocatori) dispone di un insieme di strategie composto di due possibilità: un alto livello di pubblicità (P_H) ed un basso livello di pubblicità (P_L). Pertanto l'insieme di strategie per ciascuna impresa è:

$$S_i = \{P_L^i, P_H^i\} \qquad i = 1, 2.$$

Per definire le funzioni di payoff è necessario introdurre alcune variabili aggiuntive. Definiamo Π_S il livello di profitto complessivo del settore al lordo delle spese pubblicitarie e qm_{jk} la quota di mercato di un'impresa nel caso che essa scelga un livello j di spesa pubblicitaria e la concorrente decida di spendere k. Naturalmente la somma delle quote di mercato è pari ad 1:

$$qm_{jk} + qm_{kj} = 1$$

Esistono quattro possibili combinazioni di spesa pubblicitaria delle due imprese. La funzione di payoff definisce i risultati per ciascuna delle quattro possibilità. In particolare per l'impresa 1 si ha:

$$\Pi_1(P_H^1, P_H^2) = qm_{HH}\Pi_S - P_H^1$$
$$\Pi_1(P_H^1, P_L^2) = qm_{HL}\Pi_S - P_H^1$$
$$\Pi_1(P_L^1, P_H^2) = qm_{LH}\Pi_S - P_L^1$$
$$\Pi_1(P_L^1, P_L^2) = qm_{LL}\Pi_S - P_L^1$$

Pertanto ogni equazione indica che il profitto dell'impresa 1 è uguale alla differenza tra il prodotto della la quota di mercato derivante dalla combinazione delle strategie pubblicitarie per il profitto complessivo di settore e la spesa pubblicitaria dell'impresa. Uno stesso insieme di equazioni può essere individuato per l'impresa 2.

Consideriamo ora un'applicazione numerica.

Siano:

$\Pi_S = 1.000$

$P_H^1 = 400$

$P_L^1 = 200$

e, inoltre:

$qm_{HH} = 1/2 \qquad qm_{LL} = 1/2 \qquad qm_{HL} = 4/5 \qquad qm_{LH} = 1/5.$

Pertanto quando entrambe le imprese fissano livelli elevati di spesa pubblicitaria il mercato è diviso in parti uguali e ciascuna ottiene un profitto di 500 al lordo della pubblicità. Ipotizziamo che i livelli di spesa pubblicitaria siano i medesimi anche per l'impresa 2. Utilizzando le funzioni di payoff definite in precedenza in forma implicita, possiamo comporre la matrice dei payoff della situazione in esame.

Consideriamo il processo decisionale della prima impresa. Se l'impresa 2 sceglie un basso livello di spesa pubblicitaria, l'impresa 1 guadagnerà 300 scegliendo P_L^1 e 400 scegliendo P_H^1. Perciò P_H^1 è la scelta migliore per l'impresa 1 quando 2 sceglie P_L^2. Se invece l'impresa 2 sceglie P_H^2, la comparazione dei profitti suggerisce che la migliore scelta di 1 è ancora P_H^1. Quindi per l'impresa 1 la strategia di bassa spesa pubblicitaria è strettamente dominata da P_H^1: qualsiasi sia la scelta dell'impresa 2 all'impresa 1 conviene optare per P_H^1.

Un eguale ragionamento dimostra che la strategia di elevata spesa pubblicitaria è dominante anche per l'impresa 2.

		Impresa 2	
		P_L^2	P_H^2
Impresa 1	P_L^1	300, 300	0, $\boxed{400}$
	P_H^1	$\boxed{400}$, 0	$\boxed{100}$, $\boxed{100}$

L'equilibrio del gioco si determina, quindi, per la combinazione di strategie (P_H^1, P_H^2) in corrispondenza del quale entrambe le imprese ottengono un profitto di 100. È sicuramente da notare che entrambe le imprese avrebbero maggiore vantaggio ad optare per un basso livello di spesa pubblicitaria che assicurerebbe un payoff di 300. Nonostante ciò la scelta di un basso livello di spesa pubblicitaria non è individualmente razionale ed, in definitiva, date le regole del gioco, verrà scartata.

Le due imprese dell'applicazione si trovano dinanzi ad un evidente caso di dilemma del prigioniero dove, tipicamente:

1. Gli agenti devono scegliere tra cooperazione e defezione;

2. La cooperazione sarebbe ottimale da un punto di vista comune, ma la defezione è individualmente razionale.

Infine esiste un altro modo per caratterizzare meglio l'equilibrio raggiunto nel nostro esempio. La combinazione (P_H^1, P_H^2) costituisce un equilibrio nel senso che nessuna delle due imprese ha un *incentivo* a modificare la propria strategia, data la strategia scelta dall'altra impresa. Si tratta in sostanza di un equilibrio di Nash.

La Teoria dei Giochi
Esercizi

ESERCIZI SVOLTI

7.1 Completare la seguente matrice delle vincite in modo che la coppia *(prezzi costanti, differenziare)* costituisca un equilibrio con strategia dominante:

		Impresa B	
		differenz.	***Non differ.***
Impresa A	***dim. prezzi***	1, 8	5, 7
	p. cost.	4, ...	..., -1

Ad esempio:

		Impresa B	
		differenz.	***non differ.***
Impresa A	***dim. prezzi***	1, 8	5, 7
	p. cost.	4, 3	7, -1

7.2 Completare la seguente matrice delle vincite in modo che la coppia *(prezzi costanti, non differenziare)* costituisca un equilibrio con strategia dominante:

		Impresa B	
		differenz.	*Non differ.*
Impresa A	*dim. prezzi*	-3, ...	1, 6
	p. cost.	4, 1	..., ...

✎ Ad esempio:

		Impresa B	
		differenz.	*non differ.*
Impresa A	*dim. prezzi.*	-3, 0	1, 6
	p. cost.	4, 1	2, 3

7.3 Completare la seguente matrice delle vincite in modo che la coppia *(diminuire i prezzi, differenziare)* costituisca un equilibrio con strategia dominante:

		Individuo B	
		differenz.	*non differ.*
Individuo A	*dim. prezzi*	5, 3	4, ...
	p. cost.	7, ...	3, 0

✎ Impossibile, perché A non ha nessuna strategia dominante.

7.4 Data la seguente matrice delle vincite:

		Impresa B		
		1D	***2D***	***3D***
	DP	3, 0	2, 4	1, 1
Impresa A	***CP***	5, 3	5, 4	8, 3
	AP	6, 5	1, 7	3, 10

determinare, tramite il procedimento di eliminazione iterata delle strategie strettamente dominate, le posizioni di equilibrio.

✎ L'unico equilibrio si trova in corrispondenza della combinazione di strategie *CP* e *2D*.

I passaggi sono:

		Impresa B		
		1D	***2D***	***3D***
	DP			
Impresa A	***CP***	5, 3	5, 4	8, 3
	AP	6, 5	1, 7	3, 10

Impresa B

		1D	*2D*	*3D*
	DP			
Impresa A	***CP***		5, 4	8, 3
	AP		1, 7	3, 10

Impresa B

		1D	*2D*	*3D*
	DP			
Impresa A	***CP***		5, 4	8, 3
	AP			

7.5 Data la seguente matrice delle vincite:

Impresa B

		differenz.	*non differ.*
	dim. prezzi	5, 3	4, 1
Impresa A			
	p. cost.	7, 6	3, 0

individuare, se esistono, degli equilibri di Nash.

✎ L'unico equilibrio di Nash si trova in corrispondenza della coppia *(prezzi costanti, differenziare)*.

7.6 Data la seguente matrice delle vincite:

		Impresa B	
		differenz.	*non differ.*
Impresa A	*dim. prezzi*	3, -20	7, 12
	p. cost.	1, 4	8, -3

individuare, se esistono, degli equilibri di Nash.

✎ Non esiste alcun equilibrio di Nash.

7.7 Data la seguente matrice delle vincite:

		Impresa B	
		differenz.	*non differ.*
Impresa A	*dim. prezzi*	2, 10	1, 1
	p. cost.	0, 0	10, 2

individuare, se esistono, degli equilibri di Nash.

✎ Esistono due equilibri di Nash in corrispondenza delle coppie di strategie *(diminuire i prezzi, differenziare)* e *(prezzi costanti, non differenziare).*

7.8 Data la seguente matrice delle vincite:

		Impresa B		
		1D	*2D*	*3D*
	DP	5, 1	3, 0	3, 3
Impresa A	*CP*	7, 6	8, 8	0, 1
	AP	1, 3	4, 2	2, 1

individuare, se esistono, degli equilibri di Nash.

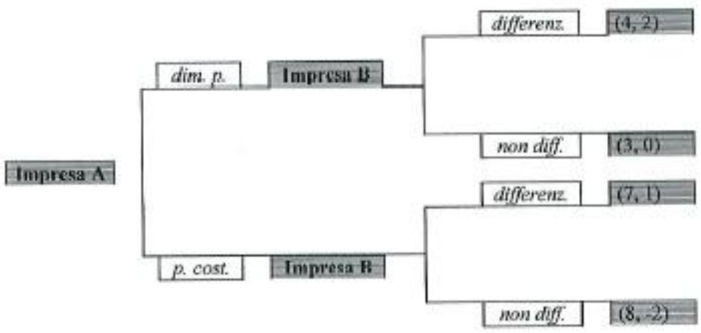
✎ Vi sono due equilibri di Nash in corrispondenza delle coppie di strategie *DP-3D* e *CP-2D*.

Infatti:

		Impresa B		
		1D	*2D*	*3D*
	DP	5, 1	3, 0	$\boxed{3}$, $\boxed{3}$
Impresa A	*CP*	$\boxed{7}$, 6	$\boxed{8}$, $\boxed{8}$	0, 1
	AP	1, $\boxed{3}$	4, 2	2, 1

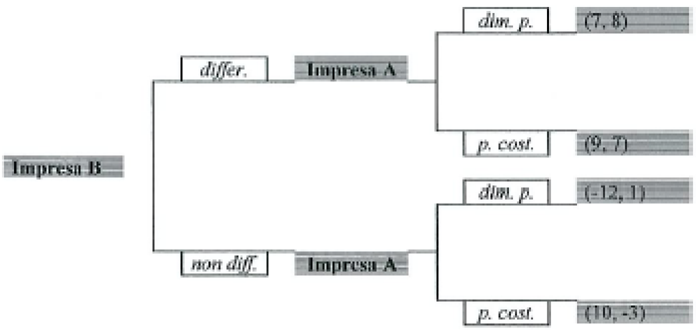
7.9 Scrivere il seguente gioco in forma estesa, supponendo che sia l'individuo *A* a scegliere per primo:

		Impresa B	
		differenz.	***non differ.***
Impresa A	***dim. prezzi***	4, 2	3, 0
	p. cost.	7, 1	8, -2

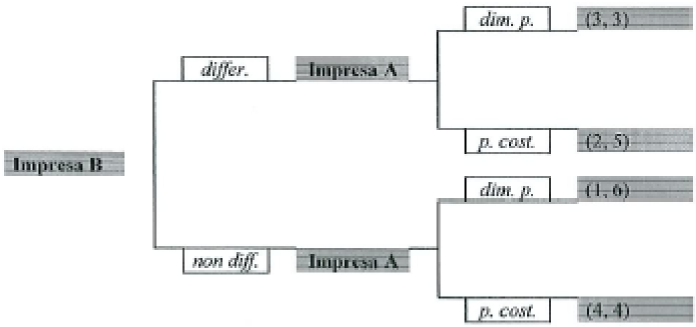


7.10 Scrivere il seguente gioco in forma estesa, supponendo che sia l'individuo *B* a scegliere per primo:

		Impresa B	
		differenz.	***non differ.***
Impresa A	***dim. prezzi***	7, 8	-12, 1
	p. cost.	9, 7	10, -3

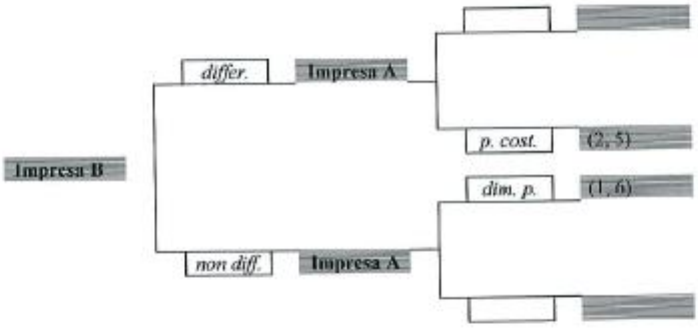


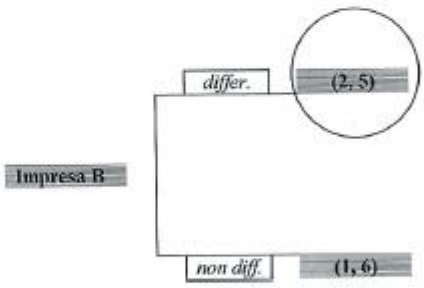
7.11 Dato il seguente albero del gioco:



individuare, tramite la metodologia della *backward induction*, l'eventuale equilibrio.

✎ I passaggi sono i seguenti:





Quindi B sceglierà di differenziare ed A di tenere i prezzi costanti.